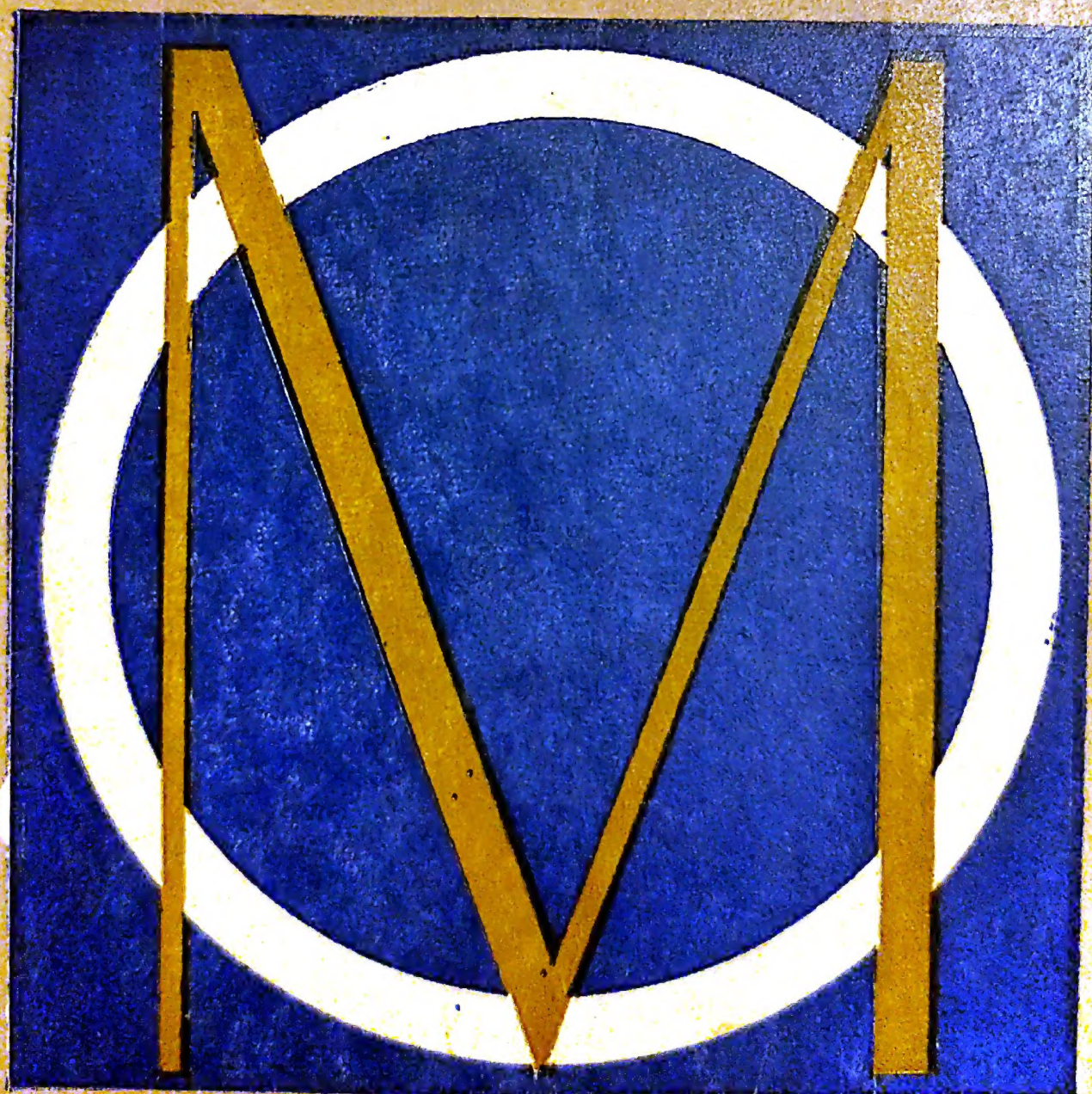


E. A. MOROZOVA I. S. PETRAKOV V. A. SKVORTOV

OLIMPIADELE INTERNATIONALE DE MATEMATICĂ

probleme, rezolvări, punctaj



E. A. MOROZOVA, I. S. PETRAKOV, V. A. SKVORŢOV

OLIMPIADELE INTERNAŢIONALE DE MATEMATICĂ

Probleme, rezolvări, punctaj

Traducere din limba rusă, revizuită şi completată de
prof. Corneliu Vlădoreanu



EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI — 1978

Începînd cu anul 1959, din inițiativa R. S. România, se organizează anual concursurile și olimpiadele internaționale de matematică.

Lucrarea „Olimpiadele internaționale de matematică” conține problemele date la cele 20 olimpiade, cu rezolvările detaliate, problemele propuse de Juriile internaționale care nu au fost date la olimpiade, precum și unele probleme de la finalele olimpiadelor naționale din unele țări participante. Toate problemele sînt rezolvate.

Cartea este adresată elevilor din ultimii ani de liceu, cadrelor didactice din învățămîntul liceal și tuturor celor care se ocupă cu organizarea concursurilor și olimpiadelor de matematică.

Е. А. МОРОЗОВА, И. С. ПЕТРАКОВ, В. А. СКВОРЦОВ

Международные математические олимпиады.

Задачи, решения, итоги.

© Издательство «Просвещение», 1976 г.

CUVÎNT ÎNAINTE

An de an crește numărul țărilor care participă la olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor. La cea de-a XIX-a olimpiadă în anul 1977 au participat 21 țări ale Europei, Asiei și Americii.

Această carte, scrisă de conducătorii delegației sovietice la olimpiadele internaționale de matematică, pune la îndemîna cititorilor materialele primelor nouăsprezece olimpiade internaționale de matematică. Majoritatea conținutului cărții este formată din problemele date la aceste olimpiade, însoțite de rezolvările amănunțite ale acestora. Au fost de asemenea cuprinse în carte unele probleme avute în vedere de Juriul internațional, însă din un motiv sau altul nu au fost date la olimpiade. Aceste probleme, propuse de diferite țări, reflectă într-un anumit grad nivelul olimpiadelor naționale din aceste țări. Se expun și unele probleme care au constituit subiectul etapelor finale ale olimpiadelor naționale din țări participante la olimpiadele internaționale.

Cartea se adresează în principal elevilor din clasele superioare, care au preocupări matematice și doresc să rezolve probleme grele. Bineînțeles că aceste probleme sînt mai dificile decît cele care se dau la diferitele olimpiade locale. Aceasta înseamnă însă că pentru rezolvarea lor trebuie depusă mai multă insistență, ca și un timp mai îndelungat. Se înțelege de la sine că rezolvarea din a doua parte a cărții trebuie citită numai după ce problema a fost rezolvată independent, sau, în orice caz, după un număr suficient de mare de încercări.

Cartea este, de asemenea, folositoare profesorilor care conduc cercuri de matematică sau organizează diferite concursuri.

În această ediție sînt adăugate noi probleme din materialele juriului internațional și din diferitele olimpiade naționale. Aceste probleme au fost puse cu multă amabilitate la dispoziția autorilor de conducătorii delegațiilor țărilor respective, pentru care li se exprimă întreaga mulțumire, îndeosebi profesorului A. Matveev (Bulgaria), R. Leiness și R. Reynold (Marea Britanie), doctorului E. Hoggy și I. Raimond

(Ungaria), profesorului W. Engel și doctorului H. Bausch (R.D.G.), docentului G. Gundji (Mongolia), profesorului Freudenthal (Olanda), profesorului Cijikovskii și docentului Monkovskii (Polonia), profesorului T. Roman (România), profesorului Greitzer (S.U.A.), docenților Vischin și Moravcic (Cehoslovacia), profesorului Ilici-Daiovici și doctorului Mitici (Iugoslavia).

Autorii păstrează vie în memorie colaborarea în cadrul juriului cu profesorii C. Ionescu-Bujor, și Rudolf Zelinka, organizatori ai primelor olimpiade. Se aduc mulțumiri lui N. B. Vasiliev pentru materialele celei de a IV-a Olimpiade din R.S.F.S.R., lui A. L. Toom și N. N. Cențov pentru sfaturi și observații.

AUTORII

OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

Începînd cu anul 1959, în fiecare an se desfășoară olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor. Aceste olimpiade și-au cucerit destul de repede o mare autoritate internațională, iar numărul țărilor participante este în continuă creștere.

Prima Olimpiadă internațională de matematică s-a ținut în anul 1959 în România, din inițiativa Societății de matematică și fizică și a Ministerului Învățămîntului din această țară. La primele olimpiade au participat numai țările socialiste. La cea de-a XIX-a olimpiadă din anul 1977 au fost reprezentați elevii din 21 țări: Algeria, Anglia, Austria, Belgia, Bulgaria, Cehoslovacia, Cuba, Finlanda, Franța, R.D.G., R.F.G., Italia, Iugoslavia, Mongolia, Olanda, Polonia, România, Ungaria, U.R.S.S., Suedia și S.U.A..

Pentru multe țări, olimpiadele internaționale sînt o continuare directă și o desăvîrșire a unei munci susținute în organizarea olimpiadelor matematice interne la diferite nivele. În unele țări (Finlanda, Austria) olimpiadele naționale au luat naștere în legătură cu faptul că aceste țări au devenit participante la olimpiadele internaționale. În alte țări desfășurarea olimpiadelor matematice naționale și a diferitelor concursuri de rezolvări de probleme au o tradiție destul de îndelungată. Astfel, încă din anul 1894 în România se țineau concursuri de rezolvări de probleme, iar în Ungaria se țineau olimpiade de matematică ale elevilor. În Rusia au avut loc concursuri de matematică din anul 1886, iar în forma lor contemporană în U.R.S.S. de la prima olimpiadă de la Leningrad din anul 1934 și prima olimpiadă de la Moscova din anul 1935.

Echipa fiecărei țări este compusă din cîte opt participanți, conducătorul delegației și adjunctul său. Conducătorii echipelor formează juriul internațional.

Olimpiadele se desfășoară în diferite țări. Cu toate că nu a fost adoptat nici un regulament oficial sau statut al olimpiadelor, s-au statornicit de-a lungul anilor anumite tradiții, care sînt respectate de toate țările organizatoare. Olimpiadele se țin vara, în prima jumătate a lunii iulie. În țara organizatoare ia ființă un comitet de organizare, care se ocupă de întreaga pregătire și desfășurare a lucrărilor olimpiadei. Toate țările participante trimit pe adresa comitetului de organizare cîteva probleme, dintre care o comisie specială alege pe cele considerate mai potrivite și le propune în final spre examinare juriului internațional. În timp de două-trei zile juriul definitivează lista problemelor pentru olimpiadă (care conține de obicei șase probleme) și punctajul maxim pentru rezolvarea fiecărei probleme propuse. Se redactează apoi și se aprobă textul problemelor în cele patru limbi de lucru ale juriului : engleză, franceză, germană și rusă. În continuare problemele sînt traduse în limbile participanților și se pregătește setul de probleme destinat fiecărui participant.

Concursul se desfășoară de-a lungul a două zile, în fiecare din acestea propunîndu-se participanților rezolvarea a trei probleme în timp de patru ore. A fost adoptată procedura de desfășurare a concursului propriu-zis. Fiecare concurent primește un număr de ordine de la 1 la 8, iar în timpul concursului, în aceeași sală, se găsesc concurenții care au numere identice, adică cîte unul din fiecare echipă.

În acest timp juriul își continuă activitatea, stabilind criteriile de apreciere a diferitelor probleme, iar după încheierea primei zile de concurs începe verificarea lucrărilor. Verificarea preliminară a acestora este făcută mai întîi de conducătorii delegațiilor împreună cu adjuncții lor. Apoi, pentru a aprecia unitar rezolvările toate lucrările sînt verificate de coordonatori de problemă. Coordonatorii sînt matematicieni ai țării organizatoare și participă de regulă la ședințele juriului cu drept de vot consultativ.

Rezultatele finale ale olimpiadei se stabilesc în plenul juriului, stabilindu-se atribuirea primelor trei premii, ca și a premiilor speciale pentru rezolvări originale și deosebit de frumoase ale problemelor.

Prin tradiție, olimpiadele internaționale stabilesc clasamentul numai pentru participanți, individual. Totdeauna prezintă însă un mare interes rezultatele neoficiale ale echipelor, exprimate prin suma punctelor acumulate de delegațiile diferitelor țări.

PUNCTAJUL OBTINUT DE ECHIPELE PARTICIPANTE LA OLIMPIADE

Țara	Numărul olimpiadelor																		
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX XX
Algeria	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	17
Anglia	-	-	-	-	-	-	-	-	231	263	193	180	110	179	164	188	241	214	190 201
Austria	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	104	82	136	144	212	192	167	151	174
Belgia	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	57	-	-	-	-	-	-	-	33 -
Bulgaria	132	175	108	196	145	198	93	238	159	206	189	145	39	120	96	171	186	174	172 182
Cehoslovacia	192	257	159	212	151	194	159	215	159	248	170	145	55	130	149	158	162	116	161 195
Čuba	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9	14	42	65	-	16	41 136
Finlanda	-	-	-	-	-	-	62	-	-	-	-	-	-	-	86	111	-	52	88 118
Franța	-	-	-	-	-	-	-	-	41	-	119	141	38	-	153	194	176	165	127 179
R.D.G.	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188	236	249	142	163 -
R.F.G.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	165 184
Grecia	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	95	50	- -
Italia	-	-	-	-	-	-	-	-	110	132	-	-	-	-	-	-	-	-	22 -
Iugoslavia	-	-	-	-	-	165	155	137	224	136	179	181	209	71	136	137	216	163	116 159 171
Mongolia	-	-	-	-	-	169	63	88	87	74	120	78	26	26	49	65	60	75	- 49 61
Olanda	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	51	87	48	51	96	112	67	78	185 157
Polonia	122	-	203	212	134	209	178	269	101	260	119	105	118	160	174	138	124	138	157 156
România	249	248	197	257	191	213	222	257	214	208	219	208	110	206	141	199	180	118	122 237
S.U.A.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	243	247	188	202 225
Suedia	-	-	-	-	-	-	-	-	135	256	104	110	43	60	99	187	160	120	137 117
Turcia	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60 -
Ungaria	233	248	270	289	234	253	244	281	251	291	247	233	255	263	215	237	258	160	190 -
U.R.S.S.	111	-	-	263	271	269	281	293	275	298	231	221	205	270	254	256	246	250	192 -
Vietnam	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188	236	175	112	22 -

Olimpiadele internaționale sînt o formă importantă de colaborare în domeniul educației, permițînd nu numai să se compare nivelul culturii matematice din diferite țări, dar și facilitînd schimbul de experiență în domeniul muncii extrașcolare cu elevii, în particular cel al experienței privind organizarea olimpiadelor naționale.

Pentru elevii participanți la olimpiadă aceste întîlniri internaționale sînt folositoare și prin aceea că le dă posibilitatea de a se cunoaște și a se împrieteni cu tineri din alte țări care au același interes pentru știință, aceeași pasiune pentru matematică. Participanții au de asemenea largi posibilități de a cunoaște țara în care are loc olimpiada. De obicei, comitetul de organizare dă concurenților posibilitatea a numeroase excursii pe cele mai interesante itinerarii, întîlniri cu tineretul țării gazdă, participări la concursuri sportive, activități care sprijină întărirea prieteniei între reprezentanți ai tineretului din țări diferite.

Pentru mulți tineri matematicieni participarea la olimpiadă a fost numai primul pas spre știință. Marea lor majoritate au intrat după absolvirea școlii în facultățile de matematică ale universităților. Participanții la primele olimpiade au devenit deja matematicieni profesioniști. Participanților la olimpiadă, pe lîngă capacitate matematică, li se cer calități pur sportive, puterea de a-și concentra eforturile asupra problemelor, într-un interval de timp limitat, în care nu-și pot etala întru totul posibilitățile reale de creație. Totuși, aceste calități sportive îi sînt necesare și omului de știință. De aceea, nu trebuie considerat ca întîmplător faptul că mulți foști învingători la olimpiadele internaționale de matematică au devenit matematicieni de valoare și lucrează astăzi intens cu elevi, transmițînd dragostea lor față de știință noii generații de tineri matematicieni.

Prima Olimpiadă internațională de matematică

Prima Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 23 iulie și 31 iulie 1959 în România, în orașele Brașov și București.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Basarab Nicolescu	— România,
Bohuslav Diviš	— Cehoslovacia,
Csonok György	— Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii			Evidențieri
	I (37–40 puncte)	II (36 puncte)	III (34–35 puncte)	
Bulgaria	—	—	—	1
Cehoslovacia	1	—	—	—
R.D.G.	—	—	—	—
Polonia	—	—	—	1
România	1	2	2	1
Ungaria	1	1	2	1
U.R.S.S.	—	—	1	2



A doua Olimpiadă internațională de matematică

A doua Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 18 iulie și 25 iulie 1960 în România, în orașele Sinaia și București.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Cezar Gheorghe	— România,
Ivan Korec	— Cehoslovacia,
Bella Barabas	— Ungaria,
Ferenc Mezei	— Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii			Evidențieri
	I (peste 40 puncte)	II (37–40 puncte)	III (33–36 puncte)	
Bulgaria	—	—	1	2
Cehoslovacia	1	1	2	2
R.D.G.	—	—	—	1
România	1	1	1	1
Ungaria	2	2	—	1



A treia Olimpiadă internațională de matematică

A treia Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 6 iulie și 16 iulie 1961 în Ungaria, în orașele Veszprém și Budapesta.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Bella Barabas	(40 puncte) — Ungaria,
Maciej Skworczyński	(39 puncte) — Polonia,
Jozsef Kota	(37 puncte) — Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (37-40 puncte)	II (34-36 puncte)	III (30-33 puncte)
Bulgaria	—	—	—
Cehoslovacia	—	—	1
R.D.G.	—	—	1
Polonia	1	—	—
România	—	1	1
Ungaria	2	3	1

A patra Olimpiadă internațională de matematică

A patra Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 15 iulie 1962 în Cehoslovacia, în orașele České Budějovice și Praga.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Iosif Bernstein	(46 puncte) — U.R.S.S.,
Gerő Herzsen	(45 puncte) — Ungaria,
Lidia Gončearova	(42 puncte) — U.R.S.S.,
Sebestyen Zoltan	(41 puncte) — Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (41-46 puncte)	II (34-40 puncte)	III (29-33 puncte)
Bulgaria	—	1	2
Cehoslovacia	—	1	3
R.D.G.	—	1	—
Polonia	—	1	3
România	—	3	3
Ungaria	2	3	2
U.R.S.S.	2	2	2



Numărul problemei *	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
20	6	—	—	45	5	2	0	1	2	1
21	6	—	—	21	11	7	9	4	2	2
22	8	14	8	6	6	8	4	2	2	6
23	5	—	—	—	34	10	3	5	2	2
24	7	—	12	12	5	6	1	2	4	14
25	6	—	—	9	8	16	4	3	3	13
26	8	2	2	5	7	1	0	6	8	25

A cincea Olimpiadă internațională de matematică

A cincea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 13 iulie 1963 în Polonia în orașele Wrocław și Varșovia.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Franz Dazar	(39 puncte)	—	Iugoslavia,
Ghennadii Maloletkin	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Rafael Sarkisian	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Alexei Tolpigo	(38 puncte)	—	U.R.S.S.,
Laszlo Zsido	(37 puncte)	—	România,
Josef Danes	(35 puncte)	—	Cehoslovacia,
Anatolii Zaitsev	(35 puncte)	—	U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (35—40 puncte)	II (28—34 puncte)	III (21—27 puncte)
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	1	—	1
R.D.G.	—	—	3
Iugoslavia	1	2	1
Polonia	—	—	2
România	1	1	3
Ungaria	—	5	3
U.R.S.S.	4	3	1

* În acest tabel, și în continuare, numărul prin care se indică o problemă este cel pe care problema îl are în prezenta carte.

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avind același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
27	6	—	—	15	13	12	11	7	3	3
28	7	—	7	11	15	13	5	4	6	3
29	7	—	16	5	6	4	4	3	5	21
30	6	—	—	6	4	6	5	12	15	16
31	6	—	—	21	11	2	1	2	4	23
32	8	21	15	8	1	8	3	1	1	6

A șasea Olimpiadă internațională de matematică

A șasea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 30 iunie și 10 iulie 1964 în U.R.S.S. în orașul Moscova.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

David Bernstein	(42 puncte)	— U.R.S.S.,
Laszlo Keringer	(41 puncte)	— Ungaria,
Ghennadii Arhipov	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
Laszlo Lovasz	(39 puncte)	— Ungaria,
Jozsef Pelikan	(39 puncte)	— Ungaria,
Tadeusz Figel	(39 puncte)	— Polonia,
Iurii Matiasевичi	(38 puncte)	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :



Țara	Premii		
	I (37-42) (puncte)	II (31-36) (puncte)	III (27-30) (puncte)
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	—	2	2
R.D.G.	—	1	2
Iugoslavia	—	1	1
Mongolia	—	—	1
Polonia	1	1	3
România	—	2	3
Ungaria	3	1	1
U.R.S.S.	3	1	3

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avind același punctaj									
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
33	7	—	—	45	2	8	6	4	3	3	1
34	7	—	—	40	0	4	1	0	0	6	21
35	6	—	—	—	57	6	2	0	0	2	5
36	6	—	—	—	16	1	0	0	1	4	50
37	7	—	—	14	3	3	23	7	14	2	6
38	9	3	2	1	47	3	0	5	4	1	6

A șaptea Olimpiadă internațională de matematică

A șaptea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 3 iulie și 13 iulie 1965 în R.D.G., în orașele Berlin și Bogensee. Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Pavel Bleher	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Laszlo Lovasz	(40 puncte)	—	Ungaria,
Serghei Vallander	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Andrei Zubkov	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Endre Makai	(38 puncte)	—	Ungaria,
Jozsef Pelikan	(38 puncte)	—	Ungaria,
Anatolii Peresețki	(38 puncte)	—	U.R.S.S.,
Nikolai Șirokov	(38 puncte)	—	U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (38–40 puncte)	II (30–37 puncte)	III (20–29 puncte)
Bulgaria	—	—	1
Cehoslovacia	—	1	3
R.D.G.	—	2	3
Finlanda	—	—	—
Iugoslavia	—	—	2
Mongolia	—	—	—
Polonia	—	1	3
România	—	4	3
Ungaria	3	2	2
U.R.S.S.	5	2	—



Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj									
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
39	4	—	—	—	—	—	37	9	15	13	6
40	6	—	—	—	19	5	4	6	11	18	17
41	8	—	30	3	2	4	3	0	5	10	23
42	6	—	—	—	37	6	7	4	19	5	2
43	7	—	—	26	9	3	3	4	8	12	15
44	9	10	0	2	0	0	11	13	10	13	21

A opta Olimpiadă internațională de matematică

A opta Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 3 iulie și 13 iulie 1966 în Bulgaria în orașul Sofia.



Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Peter Enskonatus	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Walter Lippe	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Josef Richard	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Michal Miskurevicz	(40 puncte)	—	Polonia,
Dan Voiculescu	(40 puncte)	—	România,
Laszlo Lovasz	(40 puncte)	—	Ungaria,
Jozsef Pelikan	(40 puncte)	—	Ungaria,
Lajos Posa	(40 puncte)	—	Ungaria,
Iuri Bogdanski	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Sabir-Husein-Zade	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Andrei Marcenko	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Grigorii Rosenblum	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Mihail Fokin	(39 puncte)	—	U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (39-40) (puncte)	II (34-38) (puncte)	III (31-33) (puncte)
Bulgaria	—	1	3
Cehoslovacia	—	1	2
R.D.G.	3	3	—
Iugoslavia	—	2	1
Mongolia	—	—	—
Polonia	1	4	1
România	1	1	2
Ungaria	3	2	1
U.R.S.S.	5	1	1

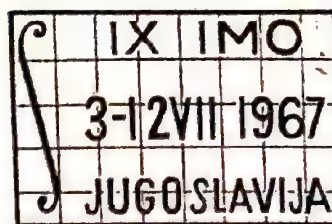
Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
45	6	—	—	50	2	4	3	0	3	10
46	7	—	48	5	1	2	0	2	2	12
47	7	—	20	4	6	5	7	5	5	20
48	5	—	—	—	68	3	0	0	0	1
49	7	—	33	3	2	7	5	7	5	10
50	8	51	6	2	1	6	3	1	1	1

A noua Olimpiadă internațională de matematică

A noua Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 2 iulie și 13 iulie 1967 în Iugoslavia în orașul Cetinje.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Peter Gheorghiev	(42 puncte)	—	Bulgaria,
Krizstof Bandt	(42 puncte)	—	R.D.G.,
Stefan Heinrich	(42 puncte)	—	R.D.G.,
Dan Voiculescu	(42 puncte)	—	România,
Alexandr Lifșiț	(42 puncte)	—	U.R.S.S.,
Simon Norton	(41 puncte)	—	Anglia,
Reinhardt Hoppner	(39 puncte)	—	R.D.G.,
Victor Turcianinov	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
György Elekeș	(38 puncte)	—	Ungaria,
Laszlo Surany	(38 puncte)	—	Ungaria,
Andrei Suslin	(38 puncte)	—	U.R.S.S.



Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I	II	III
	(38-42 puncte)	(30-37 puncte)	(22-29 puncte)
Anglia	1	2	4
Bulgaria	1	—	1
Cehoslovacia	—	1	3
Franta	—	—	—
R.D.G.	3	3	1
Italia	—	1	1
Iugoslavia	—	—	3
Mongolia	—	—	1
Polonia	—	—	1
România	1	1	4
Suedia	—	—	2
Ungaria	2	3	3
U.R.S.S.	3	3	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
51	6	—	—	31	8	10	16	7	10	12
52	7	—	27	5	16	8	7	6	5	20
53	8	28	0	2	0	4	6	6	3	45
54	6	—	—	43	11	10	16	7	1	12
55	7	—	23	4	7	9	6	8	20	22
56	8	29	5	11	7	6	11	7	5	18

A zecea Olimpiadă internațională de matematică

A zecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 18 iulie 1968 în U.R.S.S. în orașele Moscova și Leningrad.



Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Tomas Masek	(40 puncte)	—	Cehoslovacia,
Bogus Sivak	(40 puncte)	—	Cehoslovacia,
Stefan Heinrich	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Jürgen Gärtner	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Krizstof Bandt	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Ulrich Zelle	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Edi Didak	(40 puncte)	—	Polonia,
Rudolf Berceanu Barbu	(40 puncte)	—	România,
Olaf Persen	(40 puncte)	—	Suedia,
Laszlo Babai	(40 puncte)	—	Ungaria,
János Pincz	(40 puncte)	—	Ungaria,
Laszlo Györmasz	(40 puncte)	—	Ungaria,
Mihail Bludze	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Pavel Kurceanov	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Vladimir Ponomarenko	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Serghei Sobolev	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Malcom Williamson	(39 puncte)	—	Anglia,
Simon Norton	(39 puncte)	—	Anglia,
William Porterfield	(39 puncte)	—	Anglia,
Boleslaw Simanski	(39 puncte)	—	Polonia,
Valerii Fedotov	(39 puncte)	—	U.R.S.S.
Wolfgang Bogmeister	(39 puncte)	—	R.D.G.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (39-40 puncte)	II (33-38 puncte)	III (25-32 puncte)
Anglia	3	2	2
Bulgaria	—	3	1
Cehoslovacia	2	4	—
R.D.G.	5	3	—
Italia	—	—	1
Iugoslavia	—	—	3
Mongolia	—	—	—
Polonia	2	3	2
România	1	1	2
Suedia	1	2	5
Ungaria	3	3	2
U.R.S.S.	5	1	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avind același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
57	6	—	—	39	27	7	7	4	3	9
58	7	—	62	14	7	2	4	1	4	2
59	7	—	41	10	1	2	0	7	22	13
60	5	—	—	—	62	1	3	11	2	17
61	7	—	42	2	21	3	8	1	2	17
62	8	46	11	1	5	0	7	4	12	10

A unsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A unsprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 20 iulie 1969 în România, patria olimpiadelor internaționale, în orașul București.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Simon Norton	(40 puncte)	—	Anglia,
Tibor Fiala	(40 puncte)	—	Ungaria,
Vladimir Drinfeld	(40 puncte)	—	U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (40 puncte)	II (30-37 puncte)	III (24-29 puncte)
Anglia	1	1	1
Belgia	—	—	—
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	—	—	3
Franța	—	1	—
R.D.G.	—	4	4
Iugoslavia	—	2	2
Olanda	—	—	—
Mongolia	—	—	1
Polonia	—	1	—
România	—	4	2
Suedia	—	—	—
Ungaria	1	4	2
U.R.S.S.	1	3	3



Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
63	5	—	—	—	46	3	6	6	17	34
64	7	—	34	5	10	32	6	7	5	13
65	7	—	31	13	12	15	5	10	20	6
66	6	—	—	21	5	6	9	14	28	29
67	7	—	37	10	11	10	9	7	11	17
68	8	7	2	3	9	12	13	18	15	33

A douăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A douăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 8 iulie și 22 iulie 1970 în Ungaria în orașele Keszthely și Budapesta.



Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Wolfgang Burgmeister	(40 puncte)	— R.D.G.,
Imre Ruzsa	(40 puncte)	— Ungaria,
Andrei Hodulev	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Bernard Silverman	(39 puncte)	— Anglia,
Erwin Balmoczi	(39 puncte)	— Ungaria,
Arkadii Klimov	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
Istvan Koncz	(37 puncte)	— Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (37-40 puncte)	II (30-35 puncte)	III (19-28 puncte)
Anglia	1	—	6
Austria	—	—	1
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	—	—	4
Franța	—	1	4
R.D.G.	1	2	4
Iugoslavia	—	3	3
Olanda	—	—	1
Mongolia	—	—	1
Polonia	—	—	1
România	—	3	4
Suedia	—	—	2
Ungaria	3	1	3
U.R.S.S.	2	1	3

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
69	5	—	—	—	61	2	0	4	19	26
70	7	—	52	27	8	6	6	2	4	7
71	8	6	3	2	3	1	7	2	4	84
72	6	—	—	43	25	22	6	4	6	6
73	6	—	—	42	3	4	8	11	8	36
74	8	14	5	3	10	3	3	9	7	58

A treisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A treisprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 10 iulie și 21 iulie 1971 în Cehoslovacia în orașele Bratislava și Zilina.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Imre Ruzsa	(42 puncte)	—	Ungaria,
Ferenc Gondos	(39 puncte)	—	Ungaria,
Wolfgang Burgmeister	(38 puncte)	—	R.D.G.,
Stanislaw Sarek	(38 puncte)	—	Polonia,
Peter Komiat	(38 puncte)	—	Ungaria,
Peter Frankl	(37 puncte)	—	Ungaria,
Serghei Gașkov	(35 puncte)	—	U.R.S.S.



Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (35-42) (puncte)	II (23-34) (puncte)	III (11-22) (puncte)
Anglia	—	1	4
Austria	—	—	4
Bulgaria	—	—	—
Cehoslovacia	—	—	1
Cuba	—	—	—
Franța	—	—	—
R.D.G.	1	1	4
Iugoslavia	—	—	2
Olanda	—	—	2
Mongolia	—	—	—
Polonia	1	—	4
România	—	1	4
Suedia	—	—	2
Ungaria	4	4	—
U.R.S.S.	1	5	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj									
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
75	5	—	—	—	—	19	10	21	31	26	8
76	7	—	—	12	8	4	6	5	8	15	57
77	9	18	0	1	0	0	0	2	4	11	79
78	6	—	—	—	9	18	14	11	10	16	37
79	7	—	—	25	3	0	1	3	2	15	66
80	8	—	12	0	1	2	4	1	3	20	72

A paisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A paisprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 17 iulie 1972 în Polonia în orașele Varșovia și Toruń, orașul natal al lui Copernic.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Paul Kröger	(40 puncte)	—	R.D.G.,
Andrejcie Gregos	(40 puncte)	—	Polonia,
Mirko Martin	(40 puncte)	—	România,
Komarnik Wilmos	(40 puncte)	—	Ungaria,
Zsolt Tuzsa	(40 puncte)	—	Ungaria,
Zoltan Füredi	(40 puncte)	—	Ungaria,
Vladimir Burkov	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Serghei Koneaghin	(40 puncte)	—	U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (40 puncte)	II (30-39 puncte)	III (19-29 puncte)
Anglia	—	2	4
Austria	—	—	5
Bulgaria	—	—	2
Cehoslovacia	—	—	4
Cuba	—	—	—
R.D.G.	1	3	4
Iugoslavia	—	—	3
Olanda	—	—	—
Mongolia	—	—	—
Polonia	1	1	1
România	1	3	1
Suedia	—	—	2
Ungaria	3	3	2
U.R.S.S.	2	4	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
81	5	—	—	—	61	1	1	0	9	35
82	6	—	—	24	14	12	16	14	11	16
83	7	—	30	4	0	0	3	1	3	66
84	7	—	51	1	6	3	2	0	18	26
85	7	—	25	3	8	2	6	9	5	49
86	8	28	2	6	5	7	9	9	12	29

A cincisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A cincisprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 16 iulie 1973 în U.R.S.S. în orașul Moscova.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Serghei Koneaghin	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Pavel Grozman	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Gheorghe Egorov	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Janos Kollar	(38 puncte)	—	Ungaria,
David Gotto	(35 puncte)	—	Anglia.



Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I	II	III
	(35-40 puncte)	(27-33 puncte)	(17-26 puncte)
Anglia	1	—	5
Austria	—	—	6
Bulgaria	—	—	1
Cehoslovacia	—	1	4
Cuba	—	—	1
Finlanda	—	—	2
Franta	—	3	1
R.D.G.	—	3	4
Iugoslavia	—	—	5
Mongolia	—	—	1
Olanda	—	—	2
Polonia	—	2	4
România	—	1	3
Suedia	—	1	1
Ungaria	1	2	5
U.R.S.S.	3	2	3

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți având același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
87	6	—	—	37	6	3	5	14	15	45
88	6	—	—	48	6	4	0	0	2	65
89	8	42	4	8	4	4	6	9	15	33
90	6	—	—	38	22	20	14	9	8	14
91	6	—	—	62	3	2	1	2	17	38
92	8	10	2	2	3	3	1	2	1	101

A șaisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A șaisprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 4 iulie și 17 iulie 1974 în R.D.G. în orașele Erfurt și Berlin.



Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

Herbert Zinwell	(40 puncte)	—	Austria,
Jean-Cristoph Ecose	(40 puncte)	—	Franța,
Adrian Ocneanu	(40 puncte)	—	România,
Michael Steiner	(40 puncte)	—	Suedia,
Janos Kollar	(40 puncte)	—	Ungaria,
Alexandr Grigorean	(40 puncte)	—	U.R.S.S.,
Iosef B. Varga	(39 puncte)	—	Iugoslavia,
Dmitrii Tiukavkin	(39 puncte)	—	U.R.S.S.,
Miodrag Jivkovic	(38 puncte)	—	Iugoslavia,
Hoang Le Ming	(38 puncte)	—	Vietnam.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (38-40) (puncte)	II (30-37) (puncte)	III (23-29) (puncte)
Anglia	—	1	3
Austria	1	1	4
Bulgaria	—	1	4
Cehoslovacia	—	—	2
Cuba	—	—	—
Finlanda	—	—	1
Franța	1	1	3
R.D.G.	—	5	2
Iugoslavia	2	1	2
Olanda	—	—	1
Mongolia	—	—	—
Polonia	—	—	2
România	1	1	3
Suedia	1	1	—
S.U.A.	—	5	3
Ungaria	1	3	3
U.R.S.S.	2	3	2
Vietnam	1	1	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avind același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
93	5	—	—	—	114	8	6	6	1	5
94	6	—	—	64	7	18	4	5	14	28
95	8	35	5	1	1	2	9	7	18	62
96	6	—	—	90	15	11	10	10	0	4
97	7	—	27	8	15	13	9	13	21	34
98	8	35	8	3	5	1	2	7	28	51

A șaptesprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A șaptesprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat în iulie 1975 în Bulgaria în orașele Burgas și Sofia.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

John Rickard	(40 puncte)	— Anglia,
Jonathan Hitchcock	(40 puncte)	— Anglia,
Jean-Claude Sîcorave	(40 puncte)	— Franța,
Paul Voita	(40 puncte)	— S.U.A.,
Paul Herdeg	(40 puncte)	— S.U.A.,
Boris Iusin	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Wilfried Pascher	(39 puncte)	— Austria,
Miller Pockett	(39 puncte)	— S.U.A.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țară	Premii			Punctaj general
	I (39–40 puncte)	II (32–37 puncte)	III (22–31 puncte)	
Anglia	2	2	2	241
Austria	1	1	1	192
Bulgaria	—	1	4	186
Cehoslovacia	—	—	2	162
Franța	1	1	1	176
R.D.G.	—	4	4	249
Grecia	—	1	—	95
Iugoslavia	—	1	2	163
Olanda	—	—	1	67
Mongolia	—	—	1	75
Polonia	—	1	1	124
România	—	1	3	180
Suedia	—	2	—	160
S.U.A.	3	1	3	247
Ungaria	—	5	3	258
U.R.S.S.	1	3	4	246
Vietnam	—	1	3	175

A optsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A optsprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat în iulie 1976 în Austria în orașul Linz.



Premiul întâi a fost obținut de către elevii :

L. Pierre	(40 puncte)	— Franța,
T. Hovanova	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
M. Kleman	(38 puncte)	— S.U.A.,
A. Goncearov	(37 puncte)	— U.R.S.S.,
S. Finașin	(37 puncte))	— U.R.S.S.,
J. Rickard	(35 puncte)	— Anglia,
R. Meson	(34 puncte)	— Anglia,
K. Grill	(34 puncte)	— Austria,
N. Nețvetaev	(34 puncte))	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii		
	I (34—40 puncte)	II (23—31 puncte)	III (15—22 puncte)
Anglia	2	4	1
Austria	1	2	5
Bulgaria	0	2	6
Cehoslovacia	0	1	3
Cuba	0	0	0
Finlanda	0	0	1
Franța	1	3	1
R.D.G.	0	2	3
Grecia	0	0	0
Iugoslavia	0	1	3
Olanda	0	0	1
Polonia	0	0	6
România	0	1	3
Ungaria	0	3	4
U.R.S.S.	4	3	1
Suedia	0	1	3
S.U.A.	1	4	1
Vietnam	0	1	3

A nouăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A nouăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 1 iulie și 13 iulie 1977 în Iugoslavia, în orașul Belgrad

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate :

Țara	Premii			Punctaj general
	I (34-40 puncte)	II (24-33 puncte)	III (17-23 puncte)	
Algeria	—	—	—	17
Anglia	1	3	3	190
Austria	1	1	2	151
Belgia	—	—	—	33
Bulgaria	—	3	3	172
Cehoslovacia	—	3	2	161
Cuba	—	—	—	41
Finlanda	—	—	1	88
Franța	1	—	—	127
R.D.G.	2	1	1	163
R.F.G.	1	1	4	165
Italia	—	—	—	22
Iugoslavia	—	3	3	159
Mongolia	—	—	—	49
Olanda	1	2	3	185
Polonia	1	2	2	157
România	—	1	2	122
Suedia	1	1	2	137
S.U.A.	2	3	1	202
Ungaria	1	3	2	190
U.R.S.S.	1	2	4	192

A douăzecea Olimpiadă internațională de matematică

A douăzecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 6 și 12 iulie 1978 în România, în orașele București și Bușteni.

Premiul întâi a fost obținut de către elevii:

Mark Kleiman	(40 puncte) — S.U.A.
Richard Ewen Borchers	(39 puncte) — Anglia.
Nistor Victor	(37 puncte) — România
Enescu Bogdan	(36 puncte) — România
Wesermann Uwe	(35 puncte) — R.F.G.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:



Țara	Premii			Punctaj general
	I (35-40 puncte)	II (27-34 puncte)	III (22-26 puncte)	
Anglia	1	2	—	201
Austria	—	3	—	174
Bulgaria	—	1	—	182
Cehoslovacia	—	2	—	195
Cuba	—	—	—	136
Finlanda	—	—	—	118
Franța	—	2	2	179
R.F.G.	1	—	1	184
Iugoslavia	—	1	—	171
Mongolia	—	—	—	61
Olanda	—	1	1	157
Polonia	—	—	—	156
România	2	3	—	237
S.U.A.	1	3	1	225
Suedia	—	—	—	117
Turcia	—	—	—	66
Veitnam	—	2	—	200

2

PROBLEME

PROBLEMELE OLIMPIADELOR INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

Prima Olimpiadă internațională de matematică

1. Să se demonstreze că fracția $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ este ireductibilă pentru oricare număr natural n .

(Polonia)

2. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care are loc fiecare din egalitățile următoare :

a) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 1$;

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2$.

(România)

3. Se dau numerele reale a, b, c și unghiul x astfel încât să fie satisfăcută relația

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0.$$

Să se găsească ce relație de gradul al doilea este satisfăcută de a, b, c și $\cos 2x$. Să se compare relația găsită cu cea dată pentru cazul $a = 4, b = 2$, iar $c = -1$.

(Ungaria)

4. Să se construiască un triunghi dreptunghic de ipotenuză dată c , dacă se cunoaște că mediana corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a catetelor triunghiului.

(Ungaria)

5. Se dă segmentul AB și un punct oarecare M situat în interiorul său. Pe segmentele AM și MB ca laturi, se construiesc în același plan pătratele $AMCD$ și $MBEF$ situate de aceeași parte a lui AB . Cercurile de centre P și Q care sînt circumscrise pătratelor se intersectează în punctele M și N .

a) Să se arate că dreptele AF și BC trec prin punctul N .

b) Să se arate că pentru orice poziție a punctului M dreapta MN trece printr-un punct fix S .

c) Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor PQ cînd punctul M parcurge segmentul AB .

(România)

6. Se dau două plane P și Q care se intersectează după dreapta p . În planul P se dă punctul A și în planul Q punctul C . Nici unul din aceste puncte nu este situat pe dreapta p . Să se construiască în planul P punctul B , iar în planul Q punctul D , astfel ca acestea să fie vîrfuri ale trapezului isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care se poate înscrie un cerc.

(Cehoslovacia)

A doua Olimpiadă internațională matematică

7. Să se determine toate numerele de trei cifre care prin împărțire la 11 dau un cît egal cu suma pătratelor cifrelor numărului inițial.

(Bulgaria)

8. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} < 2x + 9.$$

(Ungaria)

9. Se dă un triunghi dreptunghic ABC a cărui ipotenuză de lungime a este împărțită în n părți egale (n este un număr impar). Fie α unghiul sub care se vede din punctul A acela dintre segmentele egale între ele, pe care se află mijlocul ipotenuzei. Să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a},$$

unde h este înălțimea triunghiului.

(România)

10. Să se construiască triunghiul ABC dacă se cunosc: înălțimea h_a și mediana m_a care corespund laturii a și înălțimea h_b corespunzătoare laturii b .

(Ungaria)

11. Se dă cubul $ABCD A'B'C'D'$ (v. fig. 9).

a) Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor XY , unde X este un punct oarecare al segmentului AC și Y un punct oarecare al segmentului $B'D'$.

b) Să se găsească locul geometric al punctelor Z situate pe segmentul XY și care satisfac relația $ZY = 2 XZ$.

(Cehoslovacia)

12. Se dă un trapez isoscel avînd bazele a și b , iar înălțimea h .

a) Să se construiască punctul P , situat pe axa de simetrie a trapezului, astfel ca din P ambele laturi egale ale trapezului să se vadă sub unghiuri drepte.

b) Să se determine distanța de la punctul P la una din bazele trapezului.

c) În ce condiții este posibilă construcția punctului P ?

(Bulgaria)

13. Într-un con circular drept se înscrie o sferă. Sferei i se circumscrie un cilindru circular drept a cărui bază este situată în planul bazei conului dat. Fie V_1 volumul conului și V_2 volumul cilindrului.

a) Să se demonstreze că nu poate avea loc egalitatea $V_1 = V_2$.

b) Să se găsească valoarea minimă a lui k pentru care are loc egalitatea $V_1 = k V_2$ și să se construiască în acest caz unghiul de la vârful secțiunii axiale a conului.

(R.D.G.)

A treia Olimpiadă internațională de matematică

14. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

unde a și b sînt numere reale date. Ce condiții trebuie să satisfacă a și b pentru ca soluțiile sistemului să fie pozitive și distincte?

(Ungaria)

15. Se dau lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi de arie S . Să se demonstreze că are loc relația

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

(Polonia)

16. Să se rezolve ecuația

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

unde n este un număr natural oarecare.

(Bulgaria)

17. Se dă triunghiul $P_1P_2P_3$ și un punct oarecare P situat în interiorul său. Fie Q_1, Q_2, Q_3 punctele de intersecție ale dreptelor P_1P, P_2P și P_3P cu laturile opuse respectiv lui P_1, P_2 și P_3 . Să se demonstreze că printre rapoartele

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

există cel puțin unul care nu este mai mare ca 2 și cel puțin unul care nu este mai mic decît 2.

(R.D.G.)

18. Să se construiască triunghiul ABC în care se dau $AC = b$, $AB = c$ și $\angle AMB = \omega$ ($\omega < 90^\circ$), unde M este mijlocul segmentului BC . Să se demonstreze că problema se poate rezolva dacă și numai dacă $b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leq c < b$. În ce caz are loc egalitatea?

(Cehoslovacia)

19. Se dă planul ε și trei puncte A, B, C nesituate pe aceeași dreaptă și aflate de aceeași parte a planului ε . Planul care trece prin punctele A, B, C nu este paralel cu planul ε . În planul ε se iau trei puncte oarecare A', B', C' . Fie L, M și N mijloacele segmentelor AA', BB' și CC' respectiv, iar G baricentrul triunghiului LMN (se exclud pozițiile punctelor A', B', C' pentru care L, M, N nu formează un triunghi). Să se găsească locul geometric al punctelor G când A', B', C' sînt mobile în planul ε independent unul de celălalt.

(România)

A patra Olimpiadă internațională de matematică

20. Să se găsească cel mai mic număr natural n , care are următoarele proprietăți:

- a) scrierea sa în sistemul zecimal se termină cu cifra 6;
- b) dacă se șterge ultima cifră 6 și să o scrie apoi înaintea celorlalte cifre, se obține un număr de patru ori mai mare decât numărul inițial.

(Polonia)

21. Să se găsească toate numerele reale x , care satisfac inegalitatea

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

(Ungaria)

22. Se dă cubul $ABCD A'B'C'D'$, $ABCD$ fiind baza superioară a sa, iar $A'B'C'D'$ baza inferioară, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Punctul X se mișcă cu viteză constantă pe laturile pătratului $ABCD$, în sensul $ABCD A$, iar punctul Y se mișcă cu aceeași viteză pe laturile pătratului $B'C'CB$, în sensul $B'C'CB B'$. Punctele X și Y încep

mișcarea simultan din pozițiile inițiale A , respectiv B' . Să se găsească și să se figureze locul geometric al mijloacelor segmentelor XY .

(Cehoslovacia)

23. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

(România)

24. Pe cercul K se iau trei puncte diferite: A , B , C . Să se construiască (cu rigla și compasul) pe cercul K un al patrulea punct D , astfel ca în patrulaterul $ABCD$ să se poată înscrie un cerc.

(Bulgaria)

25. Se dă triunghiul isoscel ABC , avînd raza cercului circumscris r , iar raza cercului înscris ρ . Să se demonstreze că distanța între centrele acestor cercuri este $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$.

(R.D.G.)

26. Un tetraedru $SABC$ are proprietatea că există cinci sfere, tangente la muchiile tetraedrului SA , SB , SC , AB , BC și CA sau la prelungirile lor. Să se demonstreze că:

- a) tetraedrul $SABC$ este regulat;
- b) reciproc, pentru orice tetraedru regulat există cinci sfere, cu proprietatea din enunț.

(U.R.S.S.)

A cincea Olimpiadă internațională de matematică

27. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuației

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

unde p este un parametru real.

(Cehoslovacia)

28. Să se găsească în spațiu locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte pentru care o latură trece prin punctul fix A , iar cealaltă are cel puțin un punct comun cu segmentul BC .

(U.R.S.S.)

29. Să se demonstreze că, dacă într-un poligon convex toate unghiurile sînt egale, iar laturile scrise succesiv satisfac relațiile:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n, \text{ atunci } a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n.$$

(Ungaria)

30. Să se găsească toate soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = y x_1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = y x_2, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = y x_3, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 + x_5 = y x_4, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 + x_1 = y x_5, & (5) \end{cases}$$

unde y este un parametru.

(U.R.S.S.)

31. Să se demonstreze că

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

(R.D.G.)

32. Cinci elevi A, B, C, D, E au participat la un concurs. Încercînd să anticipeze rezultatele competiției, cineva a presupus că se va obține clasamentul A, B, C, D, E . S-a constatat că el nu a indicat corect locul nici unui participant și nici o pereche de concurenți clasati succesiv. Altcineva, presupunînd clasamentul D, A, E, C, B , a indicat corect primii doi clasati și de asemenea două perechi de concurenți care au ocupat locuri succesive. Care a fost de fapt rezultatul concursului?

(Ungaria)

A șasea Olimpiadă internațională de matematică

33. a) Să se găsească toate numerele naturale n pentru care numărul $2^n - 1$ este divizibil cu 7.

b) Să se demonstreze că pentru nici un număr natural n numărul $2^n + 1$ nu este divizibil cu 7.

(Cehoslovacia)

34. Se notează cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se demonstreze că

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

(Ungaria)

35. În triunghiul ABC de laturi a, b, c se înscrie un cerc și se construiesc tangentele la cerc, paralele cu laturile triunghiului dat. Aceste tangente determină cu laturile triunghiului ABC trei noi triunghiuri, în care se înscrie câte un cerc. Să se calculeze suma ariilor tuturor acestor patru cercuri.

(Iugoslavia)

36. Fiecare membru al unui grup de 17 savanți corespundează cu ceilalți. În corespondența lor este vorba numai despre trei teme. Fiecare pereche de savanți corespundează numai pe o singură temă. Să se demonstreze că cel puțin trei savanți corespundează între ei pe aceeași temă.

(Ungaria)

37. Se dau cinci puncte în plan. Printre dreptele care unesc aceste cinci puncte nu se găsesc drepte paralele, perpendiculare sau confundate. Se duc prin fiecare punct perpendicularele pe toate dreptele care se obțin unind câte două celelalte patru puncte. Care este numărul maxim de puncte de intersecție ale acestor perpendiculare între ele, fără a lua în considerație și cele cinci puncte date?

(România)

38. Se dă tetraedrul $ABCD$. Vîrful D se unește cu centrul de greutate D_1 al feței opuse. Prin vîrfurile triunghiului ABC se duc paralele la DD_1 care intersectează fețele opuse în punctele A_1, B_1, C_1 . Să se demonstreze că volumul tetraedrului $ABCD$ este de trei ori mai mic decît volumul tetraedrului $A_1B_1C_1D_1$. Dacă punctul D_1 se ia arbitrar în interiorul triunghiului ABC , se păstrează rezultatul?

(Polonia)

A șaptea Olimpiadă internațională de matematică

39. Să se găsească toate numerele reale x care aparțin segmentului $[0, 2\pi]$ și satisfac inegalitatea

$$2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}.$$

(Iugoslavia)

40. Se dă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0, \end{cases}$$

ai cărui coeficienți satisfac condițiile :

- a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt pozitivi;
- b) toți ceilalți coeficienți sînt negativi;
- c) suma coeficienților fiecărei ecuații este pozitivă.

Să se demonstreze că $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ este singura soluție a sistemului dat.

(Polonia)

41. Se dă tetraedrul $ABCD$. Fie a lungimea muchiei AB și b lungimea muchiei CD . Distanța dintre AB și CD este d , iar mărimea unghiului acestor drepte ω . Un plan paralel cu muchiile AB și CD împarte tetraedrul în două părți. Să se calculeze raportul volumelor acestor părți, dacă se știe că raportul distanțelor de la P la AB și de la P la CD este k .

(Cehoslovacia)

42. Să se găsească patru numere reale x_1, x_2, x_3, x_4 , astfel ca fiecare dintre ele, adunat cu produsul celorlalte trei, să dea 2.

(U.R.S.S.)

43. În triunghiul OAB mărimea unghiului AOB este α ($\alpha < 90^\circ$). Printr-un punct oarecare M , care nu coincide cu O , se duc perpendicularele MP pe OA și MQ pe OB . Fie H ortocentrul triunghiului OPQ . Să se găsească locul geometric al punctelor H , dacă :

- a) M parcurge segmentul AB ;
- b) M parcurge interiorul triunghiului AOB .

(România)

44. Se dau în plan n puncte ($n \geq 3$). Fie d distanța maximă între oricare dintre aceste două puncte, pe care o vom numi diametru al sistemului de puncte dat. Să se demonstreze că între punctele sistemului diametrul nu se atinge mai mult de n ori.

(Polonia)

A opta Olimpiadă internațională de matematică

45. La olimpiadă au fost date trei probleme A , B , C . 25 elevi au rezolvat cel puțin o problemă. Cei care nu au rezolvat problema A , însă au rezolvat problema B , sînt de două ori mai mulți decît cei care au rezolvat problema C . Elevii care au rezolvat numai problema A sînt cu unul mai mulți decît ceilalți elevi, care au rezolvat problema A . Cîți elevi au rezolvat numai problema B dacă printre cei care au rezolvat numai această problemă jumătate nu au rezolvat problema A ?

(U.R.S.S.)

46. Să se demonstreze că, dacă laturile a , b , c ale unui triunghi și unghiurile α , β , γ opuse lor satisfac relația

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

atunci acest triunghi este isoscel.

(Ungaria)

47. Să se demonstreze că suma distanțelor de la centrul sferei circumscrise unui tetraedru regulat la vîrfurile acestuia este mai mică decît suma distanțelor de la orice alt punct la vîrfurile tetraedrului.

(Bulgaria)

48. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

unde n este număr natural, iar $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, \dots, n, \lambda \in \mathbb{Z}$).

(Iugoslavia)

49. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1, \end{cases}$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale date, diferite între ele.

(Cehoslovacia)

50. Se dă un triunghi ABC și punctele M, K, L , situate pe laturile AB, BC, CA respectiv, și diferite de vîrfurile triunghiului. Să se demonstreze că cel puțin una dintre ariile triunghiurilor MAL, KBM, LCK nu depășește un sfert din aria triunghiului ABC .

(Polonia)

A noua Olimpiadă internațională de matematică

51. Se dă paralelogramul $ABCD$ astfel ca triunghiul ABD să fie ascuțitunghic, $AB = a$, $AD = 1$, iar $\angle BAD = \alpha$. Să se demonstreze că paralelogramul poate fi acoperit cu patru cercuri K_A, K_B, K_C, K_D de rază 1 și avînd centrele în punctele A, B, C, D respectiv, dacă și numai dacă

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

(Polonia)

52. Într-un tetraedru, dacă o muchie și numai una singură are lungimea mai mare ca 1, să se demonstreze că volumul tetraedrului nu depășește $\frac{1}{8}$.

(Cehoslovacia)

53. Se dau numerele naturale k, m, n , astfel ca numărul $m + k + 1$ să fie prim și mai mare decît $n + 1$. Dacă $C_s = s(s + 1)$, să se arate că produsul $(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \dots (C_{m+n} - C_k)$ se divide prin produsul $C_1 C_2 \dots C_n$.

(Anglia)

54. Se dau două triunghiuri ascuțitunghice $A_0 B_0 C_0$ și $A_1 B_1 C_1$. Să se construiască triunghiul ABC asemenea cu triunghiul $A_1 B_1 C_1$ (vîrfurile notate cu aceeași literă se corespund), circumscris triunghiului $A_0 B_0 C_0$ astfel ca $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$ și $B_0 \in CA$, iar aria să fie maximă.

(Italia)

55. Se dă șirul $\{C_n\}$:

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 + a_2 + \dots + a_8 \\ C_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_8^2 \\ &\dots \dots \dots \\ C_n &= a_1^n + a_2^n + \dots + a_8^n \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

unde a, b, c sînt numere reale, iar $a \neq 0$. Să se demonstreze că sistemul :

- a) nu are soluții reale, dacă $(b-1)^2 - 4ac < 0$;
- b) are o singură soluție reală, dacă $(b-1)^2 - 4ac = 0$;
- c) are mai mult de o soluție reală, dacă $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

(Bulgaria)

60. Să se demonstreze că există un vîrf în orice tetraedru, astfel ca muchiile care trec prin acesta să constituie laturile unui triunghi.

(Polonia)

61. Se dă funcția $f: R \rightarrow R$, avînd proprietatea

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2},$$

oricare ar fi numărul real pozitiv a .

a) Să se demonstreze că funcția este periodică [adică există $b > 0$, astfel încît $f(x+b) = f(x)$ pentru orice x].

b) În cazul în care $a = 1$, să se dea un exemplu de astfel de funcție, care însă nu este constantă.

(R.D.G.)

62. Se notează prin $[x]$ partea întreagă a numărului x , adică cel mai mare număr întreg care nu îl depășește pe x . Să se calculeze suma

$$\left[\frac{n+1}{2} \right] + \left[\frac{n+2}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots$$

dacă n este un număr întreg și pozitiv, și să se demonstreze valabilitatea formulei obținute.

(Anglia)

A unsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

63. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale a cu proprietatea că numărul $z = n^4 + a$ nu este număr prim pentru nici un număr natural n .

(R.D.G.)

64. Se dau constantele reale a_1, a_2, \dots, a_n , o variabilă reală x și

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \frac{1}{2^2} \cos(a_3 + x) + \dots \\ \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x).$$

Să se demonstreze că dacă $f(x_1) = f(x_2) = 0$, atunci $x_1 - x_2 = m\pi$, m fiind un număr întreg.

(Ungaria)

65. Pentru oricare $k = 1, 2, 3, 4, 5$, să se găsească condițiile necesare și suficiente care trebuie îndeplinite de numărul $a > 0$ pentru ca să existe un tetraedru avînd k muchii de lungime a , iar celelalte $6 - k$ muchii, de lungime 1.

(Polonia)

66. Pe diametrul AB se construiește semicercul γ . Punctul C , situat pe γ și diferit de punctul A și de punctul B , se proiectează ortogonal pe AB în D . Fie semicercurile $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, care au pe AB tangentă comună, γ_1 fiind înscris în triunghiul ABC , iar γ_2 și γ_3 sînt ambele tangente la CD și la semicercul γ . Să se demonstreze că γ_1, γ_2 și γ_3 au o a doua tangentă comună.

(Olanda)

67. Se dau în plan n puncte ($n > 4$), oricare trei dintre acestea nefiind situate pe o aceeași dreaptă. Să se demonstreze că se pot găsi cel puțin C_{n-3}^2 patrulatere convexe avînd vîrfurile în patru dintre punctele date.

(Mongolia)

68. Să se demonstreze că, dacă $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 y_1 - z_1^2 > 0$ și $x_2 y_2 - z_2^2 > 0$, atunci

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}.$$

Să se stabilească condițiile necesare și suficiente, pentru ca relația de mai sus să devină egalitate.

(U.R.S.S.)

A douăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

69. Se dă triunghiul ABC și punctul M , situat în interiorul laturii AB . Fie r_1 , r_2 și r razele cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile AMC , BMC și ABC , iar ρ_1 , ρ_2 și ρ razele cercurilor care sînt: exînscrise respectiv triunghiurilor AMC , BMC , ABC . Să se demonstreze că

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

(Polonia)

70. Se dau numerele naturale a , b și n mai mari ca 1. Numerele a și b constituie bazele a două sisteme diferite de numerație. Numerele A_n și B_n au aceeași scriere $x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ în cele două sisteme de numerație ($x_n \neq 0$ și $x_{n-1} \neq 0$). Se notează cu A_{n-1} și B_{n-1} numerele obținute după ștergerea primei cifre a lui A_n , respectiv a lui B_n . Să se demonstreze că $a > b$ dacă și numai dacă .

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

(România)

71. Șirul de numere reale $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ satisface condiția

$$1 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \quad (1)$$

Se definește șirul $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ astfel :

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Să se demonstreze că : a) $0 \leq b_n < 2$, pentru orice n ;

b) dacă se dă numărul c astfel ca $0 \leq c < 2$, atunci există șirul $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ satisfăcînd condiția (1) astfel ca $b_n > c$ pentru o infinitate de indici n .

(Suedia)

72. Să se determine toate numerele întregi și pozitive n , astfel ca mulțimea $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ să poată fi descompusă în două mulțimi disjuncte astfel ca produsul tuturor

78. Se dă tetraedrul $ABCD$ cu fețele triunghiuri ascuțitunghice. Se consideră toate liniile poligonale închise $XYZTX$, X , Y , Z , T fiind puncte interioare ale laturilor AB , BC , CD , respectiv DA . Să se demonstreze că:

a) dacă $\angle DAB + \angle BCD \neq \angle ABC + \angle CDA$, atunci printre aceste linii frunte nu există nici una de lungime minimă;

b) dacă $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA$, atunci există o infinitate de astfel de linii frunte; lungimea minimă a unei astfel de linii este $2AC \sin \frac{\alpha}{2}$, unde $\alpha = \angle BAC + \angle CAD + \angle DAB$.

(Olanda)

79. Să se demonstreze că pentru orice număr natural m există în plan o mulțime S de puncte, nevidă și finită, astfel că, oricare ar fi punctul A din S , în S există exact m puncte situate la distanța 1 de punctul A .

(Bulgaria)

80. Se dă tabloul pătrat

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

format din numere întregi nenegative și astfel încât dacă $a_{1j} = 0$, atunci

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geq n.$$

Să se demonstreze că suma elementelor acestui tablou este cel puțin $\frac{1}{2} n^2$.

(Suedia)

A paisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

81. Se dau zece numere naturale diferite între ele și formate din câte două cifre. Să se demonstreze că se pot forma cu acestea două grupe disjuncte de numere, astfel încât suma numerelor

ce alcătuiesc una dintre grupe să fie egală cu suma numerelor care alcătuiesc cealaltă grupă.

(U.R.S.S.)

82. Să se demonstreze că orice patrulater inscriptibil poate fi descompus în n ($n \geq 4$) patrulatere inscriptibile.

(Olanda)

83. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele întregi nenegative m și n , numărul $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ este întreg (se face convenția ca $0! = 1$).

(Anglia)

84. Să se găsească toate soluțiile $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ($x_i \geq 0$) pentru $i = 1, 2, 3, 4, 5$) ale sistemului

$$\begin{aligned} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leq 0, \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leq 0, \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leq 0, \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leq 0, \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leq 0. \end{aligned}$$

(Olanda)

85. Fie funcțiile $f: R \rightarrow R$ și $g: R \rightarrow R$, care satisfac relația

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

pentru orice numere reale x și y . Să se demonstreze, în condițiile în care f nu este identic nulă, iar $|f(x)| \leq 1$ pentru orice număr real x , că $|g(y)| \leq 1$ pentru orice număr real y .

(Bulgaria)

86. Se dau patru plane paralele diferite. Să se demonstreze că există un tetraedru regulat avînd cîte un vîrf în fiecare din aceste plane.

(Anglia)

A cincisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

87. Fie O un punct de pe dreapta l , iar $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ sînt n vectori de lungime 1, astfel încît punctele P_1, P_2, \dots, P_n se află

într-un plan care conține dreapta l și sînt toate de aceeași parte a acesteia. Să se demonstreze că dacă n este un număr impar, atunci

$$|\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_n| \geq 1,$$

unde $|\vec{OM}|$ reprezintă lungimea vectorului \vec{OM} .

(Cehoslovacia)

88. Să se stabilească dacă există în spațiu o mulțime finită M de puncte necuprinse în același plan, astfel ca pentru oricare două puncte A și B din M să se găsească în M alte două puncte C și D , cu proprietatea că dreptele AB și CD sînt paralele, dar nu coincid.

(Polonia)

89. Să se găsească valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$, dacă a și b sînt numere reale, iar ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puțin o rădăcină reală.

(Suedia)

90. Un soldat trebuie să verifice absența minelor pe un teren în formă de triunghi echilateral. Raza de acțiune a detectorului său este egală cu jumătatea înălțimii triunghiului. Care este drumul minim pe care trebuie să-l urmeze pentru a-și îndeplini misiunea?

(Iugoslavia)

91. Se dă o mulțime nevidă G de funcții de forma $f: R \rightarrow R$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in R$ și $a \neq 0$, cu proprietățile:

a) dacă f și g sînt funcții din mulțimea G , atunci $g \circ f \in G$ (prin $g \circ f$ înțelegem funcția cu proprietatea $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, adică G este o mulțime închisă față de operația de compunere a funcțiilor);

b) dacă funcția $f \in G$, atunci funcția inversă $f^{-1} \in G$ (prin funcția f^{-1} înțelegem funcția cu proprietatea $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$);

c) pentru orice funcție $f \in G$ există numărul real x_f , așa încît $f(x_f) = x_f$.

Să se demonstreze că există un număr real k , astfel încît $f(k) = k$, oricare ar fi funcția f din mulțimea G .

(Polonia)

92. Se dau numerele reale și pozitive a_1, a_2, \dots, a_n și numărul real q cu proprietatea $0 < q < 1$. Să se găsească n numere reale b_1, b_2, \dots, b_n astfel ca :

a) $a_k < b_k$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$;

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ pentru $k = 1, 2, \dots, n - 1$;

c) $b_1 + b_2 + \dots + b_n < \frac{1 + q}{1 - q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

(Suedia)

A șaisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

93. Trei jucători A, B, C joacă un joc cu trei cărți; pe fiecare din acestea este tipărit un număr întreg. Cele trei numere p, q, r satisfac condițiile $0 < p < q < r$. Cărțile se amestecă, apoi fiecare jucător primește câte o carte și câștigă atâtea bile cît indică numărul de pe cartea sa. Cărțile se restituie după fiecare din cele N jocuri, iar bilele câștigate rămîn la jucători. După cel puțin două jocuri A are 20 bile, B are 10 bile, iar C are 9 bile. Dacă în ultimul joc B a obținut r bile, cine a obținut la primul joc q bile?

(S.U.A.)

94. Se dă triunghiul ABC . Să se demonstreze că pentru a găsi pe segmentul AB un punct D astfel ca CD să fie media geometrică a lui AD și BD , este necesar și suficient să aibă loc inegalitatea

$$\sin A \sin B \leq \sin^2 \frac{C}{2}.$$

(F inlanda)

95. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n , numărul

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k+1}{2n+1} 2^{3k}$$

nu este divizibil cu 5.

(România)

96. Se consideră descompunerile unei table de șah (8×8 pătrățele) în p dreptunghiuri disjuncte care satisfac condițiile:

a) Fiecare dreptunghi este format dintr-un număr de pătrățele întregi și conține un număr egal de pătrățele albe și negre.

b) Dacă a_i este numărul pătratelor albe din dreptunghiul i , atunci $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_p$.

Să se determine cea mai mare valoare a lui p pentru care există o asemenea descompunere și apoi, pentru acea valoare a lui p , să se determine toate succesiunile a_1, a_2, \dots, a_p pentru care se poate realiza o astfel de descompunere.

(Bulgaria)

97. Să se găsească mulțimea valorilor sumei

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

unde a, b, c, d sînt numere reale pozitive.

(Olanda)

98. Fie P un polinom, care nu este o constantă, cu coeficienți întregi, iar $n(P)$ numărul tuturor numerelor întregi diferite între ele pentru care $(P(k))^2 = 1$. Să se demonstreze că $n(P) - \deg(P) \leq 2$, unde $\deg(P)$ înseamnă gradul polinomului P .

(Suedia)

A șaptesprezecea Olimpiadă internațională de matematică

99. Se dau $2n$ numere reale $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ și $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Dacă z_1, z_2, \dots, z_n este o permutare a numerelor y_1, y_2, \dots, y_n , să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

(Cehoslovacia)

100. Fie $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un șir infinit de numere întregi astfel încît $a_k < a_{k+1}$. Să se arate că o infinitate de termeni din acest șir pot fi puși sub forma $a_m = xa_p + ya_q$, unde x și y sînt întregi pozitivi și $p \neq q$.

(Anglia)

101. Se dă un triunghi ABC . În exteriorul său se construiesc, în același plan, triunghiurile BPC , CQA și ARB astfel ca $\angle PBC =$

$= \angle CAQ = 45^\circ$, $\angle BCP = \angle QCA = 30^\circ$, $\angle ABR = \angle BAR = 15^\circ$.
Să se demonstreze că $\angle QRP = 90^\circ$ și $QR = RP$.

(Olanda)

102. Fie A suma cifrelor numărului 4444^{4444} iar B suma cifrelor lui A . Să se găsească suma cifrelor lui B . Sistemul de numerație este cel zecimal.

(U.R.S.S.)

103. Pe un cerc de rază 1 există 1975 de puncte astfel ca lungimea coardei ce unește oricare două din acestea să fie un număr rațional?

(U.R.S.S.)

104. Să se determine toate polinoamele de două variabile care satisfac condițiile :

a) P este un polinom de gradul n omogen în variabilele reale t, x, y :

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y);$$

b) pentru orice a, b, c numere reale

$$P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0;$$

c) $P(1, 0) = 1$.

(Anglia)

A optsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

105. Se dă un patrulater plan convex de arie 32 cm^2 în care suma lungimilor unei diagonale și a două laturi opuse este de 16 cm . Să se găsească toate valorile pe care le poate avea lungimea celeilalte diagonale.

(Cehoslovacia)

106. Se dau polinoamele $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$, $k = 1, 2, \dots$. Să se demonstreze că pentru orice n natural toate rădăcinile ecuației $P_n(x) = x$ sînt reale și diferite între ele.

(Finlanda)

107. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic poate fi complet umplută cu cuburi de volum 1. Așezînd în ea volumul maxim posibil de cuburi, fiecare avînd volumul 2, cu muchiile para-

celor opt segmente $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ sînt cele douăsprezece vîrfuri ale unui dodecagon regulat.

(Olanda)

112. Într-o succesiune finită de numere reale suma oricăror șapte termeni consecutivi este negativă iar suma oricăror unsprezece termeni consecutivi este pozitivă. Să se determine numărul maxim de termeni ai unei astfel de succesiuni.

(Vietnam)

113. Fie n un număr întreg dat mai mare decît 2. Se consideră mulțimea V_n a tuturor numerelor întregi de forma $1 + kn$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Un număr din mulțimea V_n se numește indecompozabil în V_n dacă și numai dacă nu există în V_n două numere p și q astfel încît $m = pq$.

Să se demonstreze că există un număr r aparținînd mulțimii V_n , care poate fi scris în mai mult de un singur mod sub formă de produs de numere indecompozabile în mulțimea V_n . Două descompuneri în V_n , care diferă între ele numai prin ordinea factorilor, sînt considerate drept aceeași descompunere.

(Olanda)

114. Fie a, b, A și B patru numere reale date. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$, dată de

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x.$$

Să se demonstreze că dacă pentru orice număr real x are loc inegalitatea $f(x) \geq 0$, atunci $a^2 + b^2 \leq 2$ și $A^2 + B^2 \leq 1$.

(Anglia)

115. Fie două numere naturale a și b . Dacă se împarte $a^2 + b^2$ la $a + b$, se obține cîțul q și restul r . Să se determine toate perechile (a, b) pentru care $q^2 + r = 1977$.

(R.F.G.)

116. Fie N mulțimea numerelor întregi pozitive. Se consideră funcția $f: N \rightarrow N$, care satisface inegalitatea $f(n+1) > f[f(n)]$, oricare ar fi numărul natural n . Să se demonstreze că $f(n) = n$ pentru orice număr natural n .

(Bulgaria)

**PROBLEME DIN MATERIALELE JURIULUI
OLIMPIADELOR INTERNAȚIONALE
DE MATEMATICĂ**

117. Se dau în plan $n > 3$ puncte, printre care nu se găsesc trei care să fie situate pe aceeași dreaptă. Există un cerc care să treacă prin cel puțin trei puncte date și să nu conțină în interiorul său nici unul din celelalte puncte?

(Cehoslovacia)

118. Se dau n numere pozitive a_1, a_2, \dots, a_n , astfel încît $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Să se demonstreze că

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

(R.D.G.)

119. Se dau cinci puncte în plan, printre care nu există trei care să fie situate pe o aceeași dreaptă. Să se demonstreze că printre acestea se găsesc patru puncte care sînt vîrfuri ale unui patrulater convex.

(Polonia)

120. Să se demonstreze inegalitatea

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} + \operatorname{tg} \frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} > 1,$$

pentru toate valorile lui x și ale lui α , care satisfac condițiile

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

(U.R.S.S.)

121. Fie m un poligon plan convex avînd perimetrul l și aria S iar $M(R)$ mulțimea punctelor din spațiu a căror distanță la m nu depășește pe R , iar $V(R)$ este volumul corpului $M(R)$. Să se demonstreze că

$$V(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 + \frac{\pi}{2} l R^2 + 2SR.$$

Se consideră că punctul C este situat la o distanță care nu depășește pe R , față de figura m , adică punctul C aparține lui $M(R)$, dacă există pe figura m un punct D situat față de punctul C la o distanță care nu depășește pe R .

(U.R.S.S.)

122. Cum trebuie să fie așezați doi cilindri circulari de lungime infinită, pentru ca aceștia să se intersecteze după o curbă plană (adică o curbă situată în întregime într-un plan)?

(U.R.S.S.)

123. Se dă o cutie cu zahăr tos, o balanță cu două talere și o greutate de 1 g. Să se găsească modul în care se poate cântări în cel mai scurt timp 1 kg de zahăr. (Se va indica schema cântăririlor)

(U.R.S.S.)

124. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sin 3x \cos (60^\circ - 4x) + 1}{\sin (60^\circ - 7x) - \cos (30^\circ + x) + m} = 0,$$

m fiind un parametru real.

(România)

125. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x = 1964 \sin x - 189.$$

(R.D.G.)

126. Să se determine dacă există un număr natural z astfel încât să poată fi scris în două moduri diferite sub forma $z = x! + y!$, x și y fiind două numere naturale care satisfac inegalitatea $x \leq y$.

(Cehoslovacia)

127. Să se determine cifrele x, y, z , dacă se cunoaște că egalitatea

$$\sqrt{\underbrace{xx \dots x}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{yy \dots y}_n = \underbrace{zz \dots z}_n}$$

are loc cel puțin pentru două valori diferite ale numărului natural n . Să se găsească toate valorile lui n pentru care are loc egalitatea.

(Bulgaria)

128. Fie n numere reale $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$C_n^2 \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_2 a_n} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right) \geqslant$$

$$\geqslant 4 \left(\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_n} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_2 + a_n} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n} \right)^2$$

și să se găsească condiția care trebuie îndeplinită de numerele a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), astfel ca să aibă loc egalitatea.

(Iugoslavia)

129. Să se găsească numărul maxim de regiuni în care este împărțit un disc de segmentele care unesc n puncte situate pe cercul care mărginește acest disc.

(Polonia)

130. Se dau punctele A, B, C, D , situate pe un cerc astfel ca AB să fie diametru al cercului, iar CD să nu fie diametru. Să se arate că dreapta care unește punctul de intersecție al tangentelor la cerc în punctele C și D cu punctul de intersecție al dreptelor AC și BD este perpendiculară pe dreapta AB .

(Polonia)

131. Se consideră domeniile P și Q ale aceluiași plan, mărginite de cercul care are centrul S și raza de lungime 1 și respectiv de pătratul care are centrul M și latura de lungime 2. Fie XY ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel XYZ . Să se determine ce domeniu umplu virfurile Z ale triunghiurilor dreptunghice XYZ dacă X parcurge domeniul P , iar Y parcurge domeniul Q .

(Cehoslovacia)

132. Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ două paralelograme așezate arbitrar în spațiu, iar M, N, P, Q patru puncte care împart în același raport segmentele $AA', BB', CC',$ respectiv DD' .

a) Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.

b) Să se găsească locul geometric al centrelor paralelogramelor $MNPQ$ în cazul în care punctul M parcurge segmentul AA' . (Vîrfurile paralelogramelor sînt notate consecutiv în ordine alfabetică).

(România)

133. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{p},$$

p fiind un parametru real. Să se cerceteze pentru care valori ale parametrului p ecuația admite soluții și să se stabilească numărul acestora.

(Ungaria)

134. Să se construiască un triunghi dacă se cunosc razele cercurilor exînscrise.

(Ungaria)

135. Se dau trei dreptunghiuri egale. Centrele lor coincid, iar planele în care acestea se găsesc sînt perpendiculare două cîte două. Fiecare dreaptă de intersecție a planelor acestor dreptunghiuri conține cîte o linie mijlocie a acestora, lungimile celor două linii mijlocii fiind diferite între ele. Se consideră poliedrul convex ale cărui vîrfuri sînt date de vîrfurile acestor dreptunghiuri.

a) Să se determine volumul acestui poliedru.

b) Să se stabilească dacă poliedrul poate fi regulat, iar în caz afirmativ să se găsească condițiile în care aceasta are loc.

(Ungaria)

136. Să se demonstreze că volumul V și aria laterală S a unui con circular drept satisfac inegalitatea

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leq \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

În ce caz are loc egalitatea?

(Bulgaria)

137. Fie două paralelograme echivalente P și P' , ale căror laturi a și b , respectiv a' și b' satisfac inegalitățile $a' \leq a \leq b \leq b'$, iar segmentul b' poate fi așezat în întregime în paralelogramul P . Să se demonstreze că paralelogramele P și P' pot fi descompuse fiecare în aceleași patru poligoane.

(Bulgaria)

138. Trei din fețele unui tetraedru sînt triunghiuri dreptunghice, iar cea de-a patra față a tetraedrului nu este triunghi obtuzunghic. Să se demonstreze că:

a) condiția necesară și suficientă ca și cea de-a patra față a tetraedrului să fie triunghi dreptunghic este ca într-unul dintre vîrfurile tetraedrului două și numai două dintre unghiurile fețelor să fie drepte;

b) dacă toate fețele tetraedrului sînt triunghiuri dreptunghice, atunci volumul acestuia este dat de $\frac{1}{6}$ din produsul celor mai scurte trei muchii care nu aparțin aceleiași fețe.

(Bulgaria)

139. Într-o sală se găsesc n oameni ($n \geq 2$). Să se demonstreze că printre ei se găsesc doi oameni care au același număr de cunoscuți printre cei prezenți (se presupune că dacă A este cunoscut al lui B , atunci și B este cunoscut al lui A ; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuși).

(Polonia)

140. Să se demonstreze inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 \leq k(a_1^2 + \dots + a_k^2), \quad (1)$$

k fiind număr natural ($k \geq 1$), iar a_1, a_2, \dots, a_n numere reale oarecare.

b) Să se demonstreze, folosind inegalitatea (1), că în cazul în care numerele reale a_1, a_2, \dots, a_n satisfac inegalitatea

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}, \quad (2)$$

toate numerele a_1, a_2, \dots, a_n sînt nenegative.

(Cehoslovacia)

141. Se dă cercul avînd centrul S și raza de lungime 1. Fie ABC un triunghi oarecare circumscris acestui cerc, iar $SA \leq SB \leq SC$. Să se găsească locul geometric al : a) vîrfurilor A ; b) vîrfurilor B ; c) vîrfurilor C ale acestor triunghiuri.

(Cehoslovacia)

142. Se dă un număr natural N care se descompune ca sumă a unor numere întregi consecutive.

a) Să se găsească toate aceste descompuneri dacă $N = 550$.

b) Să se determine numărul de astfel de descompuneri ale lui $N = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ (α, β și γ sînt numere naturale). Care din aceste descompuneri conțin numai numere naturale?

c) Să se găsească numărul acestor descompuneri pentru numărul natural oarecare N .

(România)

143. Să se demonstreze că, dacă n este un număr întreg pozitiv, au loc inegalitățile :

$$a) \lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n,$$

$$b) \lg(n!) > \frac{3n}{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - 1 \right).$$

(România)

144. Să se rezolve ecuația

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx$$

și să se discute rădăcinile sale în funcție de parametrul real m . Care sînt perechile de numere întregi (x, m) care satisfac egalitatea dată?

(România)

145. Lungimile a, b, c și a_1, b_1, c_1 ale laturilor triunghiului ABC , respectiv $A_1B_1C_1$ formează cîte o progresie aritmetică, iar $\hat{A} = \hat{A}_1$. Să se demonstreze că în acest caz cele două triunghiuri sînt asemenea.

(Bulgaria)

146. În cel mai mare dintre două cercuri care sînt tangente interior se înscrie un triunghi echilateral. Din vîrfurile sale se duc

tangentele la cercul mai mic. Să se demonstreze că lungimea uneia din aceste tangente este egală cu suma lungimilor celorlalte două tangente.

(Bulgaria)

147. Să se găsească toate perechile (x, y) formate din numere întregi și pozitive care satisfac ecuația $2^x = 3^y + 5$.

(Bulgaria)

148. Polinomul $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ are coeficienții numere întregi, astfel încât ad este număr impar iar bc este număr par. Să se demonstreze că polinomul P admite cel puțin o rădăcină irațională.

(Polonia)

149. Într-un cerc se înscrie patrulaterul $ABCD$. Să se demonstreze că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , CDA , BCD și DAB sînt conciclice.

(Polonia)

150. Să se demonstreze că cele patru perpendiculare duse din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sînt concurente.

(Polonia)

151. Se dau două cercuri concentrice de raze r și R . Să se determine numărul maxim de cercuri care sînt tangente simultan la cele două cercuri și nu se intersectează două cîte două. Să se arate că acest număr este cuprins între

$$\frac{3}{2} \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}} - 1 \quad \text{și} \quad \frac{63}{20} \frac{R + r}{R - r}$$

(România)

152. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuației

$$\sqrt{x^2 + 2px - p^2} - \sqrt{x^2 - 2px - p^2} = 1,$$

p fiind un număr real pozitiv.

(Cehoslovacia)

153. Se dă poligonul regulat plan $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$). Să se determine numărul de triunghiuri obtuze $A_iA_jA_k$.

(Cehoslovacia)

154. Se dă succesiune de numere întregi a_1, a_2, \dots, a_n , $n \geq 2$. Să se demonstreze că există un subșir $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}$ al acestui șir ($1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_m \leq n$) astfel ca numărul $a_{k_1}^2 + a_{k_2}^2 + \dots + a_{k_m}^2$ să se dividă la n .

(Cehoslovacia)

155. Se dau cinci puncte în plan, oricare trei din acestea nefiind situate pe aceeași dreaptă. Oricare două din aceste puncte sînt unite printr-un segment fie de culoare roșie, fie de culoare albastră, astfel ca nici un triplet de puncte să nu formeze un triunghi avînd laturile de aceeași culoare.

a) Să se demonstreze că :

1) fiecare punct este capăt a două și numai a două segmente de culoare roșie și a două și numai a două segmente de culoare albastră ;

2) segmentele de culoare roșie formează o linie poligonală închisă care trece prin toate cele cinci puncte (analog pentru segmentele de culoare albastră).

b) Să se arate cum trebuie unite cele cinci puncte prin segmente de culoare roșie sau albastră, astfel ca să fie îndeplinită condiția din enunțul problemei.

(Cehoslovacia)

156. Să se determine numărul maxim de sfere avînd raza de lungime $1/2$ care pot fi așezate într-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $10 \times 10 \times 1$.

(Iugoslavia)

157. Un alfabet constă din n litere. Să se găsească lungimea maximă a unui cuvînt, dacă :

a) oricare două litere succesive sînt diferite între ele,

b) prin ștergerea de litere dintr-un cuvînt nu este posibilă obținerea unor cuvinte de forma $abab$ ($a \neq b$).

(Iugoslavia)

158. Fie

$$f(a, b, c) = \left| \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c} \right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c}.$$

Să se demonstreze că

$$f(a, b, c) = 4 \max \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right\}.$$

(Iugoslavia)

159. Se consideră toate dreptele care împart un triunghi în două figuri de aceeași arie. Cunoscând laturile a, b, c ale triunghiului ABC , să se determine lungimea minimă a segmentului determinat pe o astfel de dreaptă de laturile triunghiului și să se găsească câte segmente de această lungime minimă se află pe dreptele respective.

(România)

160. Două oglinzi formează un unghi diedru de mărime α . În interiorul acestui unghi se află o luminare și un observator. Câte imagini ale luminării vede observatorul?

(U.R.S.S.)

161. Se dă un patrulater de arie S , ale cărui laturi au lungimile a, b, c și d . Să se demonstreze că

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

(U.R.S.S.)

162. n elevi numerotați de la 1 la n sînt așezați în ordinea $1, 2, \dots, n$. La o comandă dată fiecare își schimbă locul cu un alt elev sau nu. Este posibil ca după două comenzi să se obțină ordinea $n, 1, 2, \dots, n-1$?

(U.R.S.S.)

163. Se decupează din hîrtie o figură care are aria egală cu 1, apoi se împarte în 10 zone și se colorează aceste zone în 10 culori diferite. Se întoarce apoi figura pe partea cealaltă și se împarte în alt mod tot în 10 zone. Să se demonstreze că aceste 10 zone pot

fi colorate cu aceleași culori ca și cele de pe partea opusă astfel încît suma ariilor zonelor vopsite pe ambele părți în aceeași culoare să nu fie mai mică decît 0,1.

(U.R.S.S.)

164. Să se demonstreze că într-un hexagon convex de arie S se poate duce totdeauna o diagonală care decupează un triunghi a cărui arie nu depășește $\frac{1}{6}S$.

(U.R.S.S.)

165. Se aleg 100 de numere naturale consecutive și se ridică fiecare la puterea a opta. Să se găsească ultimele două cifre cu care se termină suma acestor puteri.

(U.R.S.S.)

166. Se dau vîrfurile A și centrul de greutate M ale triunghiului ABC . Să se găsească locul geometric al vîrfurilor B , astfel încît unghiurile A , B și C ale triunghiului ABC să satisfacă în același timp condițiile

$$40^\circ \leq \hat{A} \leq 70^\circ, 40^\circ \leq \hat{B} \leq 70^\circ \text{ și } 40^\circ \leq \hat{C} \leq 70^\circ.$$

(U.R.S.S.)

167. Se dă un tetraedru în care oricare două muchii opuse sînt perpendiculare. Să se demonstreze că toate cele șase mijloace ale muchiilor sale sînt situate pe o aceeași sferă.

(U.R.S.S.)

168. Să se cerceteze dacă se pot lua pe un cub 100 (sau 200) de puncte, astfel încît la toate rotațiile acestuia punctele să se transforme unele în altele.

(U.R.S.S.)

169. Să se rezolve inecuația

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(U.R.S.S.)

170. Într-un grup de traducători fiecare cunoaște cel puțin o limbă străină. Printre ei 24 vorbesc japoneza, 24 vorbesc malaieza

iar 24 vorbesc persana. Să se demonstreze că se poate găsi o parte a acestui grup în care se află exact 12 traducători care vorbesc japoneza, exact 12 traducători care vorbesc malaieza și exact 12 traducători care vorbesc persana.

(U.R.S.S.)

171. Se dă binomul $l(z) = Az + B$ avînd coeficienții complecși A și B . Se cunoaște că valoarea maximă a lui $|l(z)|$ pe segmentul $[-1, 1]$ ($y = 0$) al axei reale din planul complex $z = x + iy$ este M . Să se demonstreze că oricare ar fi $z \in C$, are loc inegalitatea $|l(z)| \leq M \rho$, unde ρ reprezintă suma distanțelor de la punctul P care este imaginea numărului complex z , la punctele Q_1 și Q_2 care sînt imagini ale numărului complex $z = 1$, respectiv $z = -1$.

(U.R.S.S.)

172. Pe cercul avînd centrul în O și lungimea razei egală cu 1 se iau punctele $A_1, A_2, \dots, A_{999}, A_{1000}$ astfel încît $\angle A_0 O A_k = k$ (măsura făcîndu-se în radiani). Să se găsească în cîte arce de lungime diferită împart aceste puncte cercul.

(U.R.S.S.)

173. Să se arate că, oricare ar fi perechea (f, g) de vectori din spațiu, are loc inegalitatea

$$af^2 + bfg + cg^2 \geq 0, \quad (A)$$

dacă și numai dacă

$$a \geq 0, c \geq 0, 4ac \geq b^2. \quad (B)$$

(Ungaria)

174. În triunghiul isoscel ABC , $AB = AC$ și $\angle BAC = 20^\circ$. Se notează cu D acel punct al laturii AB pentru care $AD = CD$, iar cu E se notează acel punct al laturii AC pentru care $BC = CE$. Să se găsească mărimea unghiului CDE .

(Ungaria)

175. Să se demonstreze că dacă a și b sînt numere reale pozitive, iar m este număr întreg, are loc inegalitatea

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

(Polonia)

176. Se spune că polinomul $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ avînd coeficienții a_0, a_1, \dots, a_k numere întregi este divizibil cu m , dacă $P(x)$ este multiplu de m pentru orice valoare întreagă a lui x . Să se arate că dacă $P(x)$ este divizibil cu m , atunci $k!a_0$ este multiplu de m . Să se demonstreze, de asemenea, că dacă a_0, k și m sînt numere întregi pozitive astfel încît $k!a_0$ este multiplu de m , se poate găsi polinomul $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$ divizibil cu m .

(Anglia)

177. Se dau numerele $x > 0, y > 0, z > 0$ și punctul O . Să se arate că există un triunghi echilateral ABC (punctele O, A, B și C sînt situate în același plan) astfel ca $OA = x, OB = y$ și $OC = z$ dacă și numai dacă $x + y \geq z, y + z \geq x$ și $z + x \geq y$.

(Anglia)

178. Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a , adică cel mai mare număr întreg care nu depășește pe a , iar $\{a\} = a - [a]$ partea fracționară a lui a . Să se arate că numerele $\{10^n/\sqrt{2}\}$ sînt diferite între ele ($n = 0, 1, \dots$).

(Suedia)

179. Două vapoare plutesc pe mare în direcții fixe, cu viteze constante. La ora 9.00 între vapoare distanța este de 20 mile, la ora 9.35 de 15 mile, iar la ora 9.55 distanța este de 13 mile. La ce oră distanța dintre vapoare este minimă și care este această distanță?

(Suedia)

180. Se dă numărul prim impar p . Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca suma pătratelor a $p - 1$ numere naturale consecutive să se dividă la suma acestor numere.

(Cehoslovacia)

181. Se dau n puncte în spațiu astfel încît oricare trei din acestea sînt vîrfuri ale unui triunghi care are un unghi a cărui mărime depășește 120° . Să se demonstreze că aceste puncte se pot nota cu literele A_1, A_2, \dots, A_n astfel ca fiecare din unghiurile $A_i A_j A_k$ să fie mai mare decît 120° , dacă $i < j < k$.

(Cehoslovacia)

182. Se dau în spațiu șase puncte P_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) astfel ca oricare patru dintre acestea să nu fie situate în același plan. Fiecare segment de dreaptă $P_j P_k$ ($j \neq k$) este colorat în negru sau în alb. Să se demonstreze că există cel puțin un triunghi $P_j P_k P_l$ ale cărui laturi au aceeași culoare.

(Suedia)

183. Să se demonstreze că există o infinitate de numere întregi pozitive care nu pot fi scrise ca suma pătratelor a trei numere întregi.

(Suedia)

184. Să se determine toate numerele reale λ pentru care ecuația

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x)$$

- a) nu are nici o soluție,
- b) are o singură soluție,
- c) are numai două soluții,

d) are mai mult de două soluții reale pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(R.D.G.)

185. Să se demonstreze că

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

(Ungaria)

186. Se dau 4000 puncte în plan, astfel ca oricare trei să nu fie situate pe o aceeași dreaptă. Să se demonstreze că există 1000 patru-latre în plan neavînd puncte comune unul cu altul, ale căror vîrfuri se află în punctele date.

(Ungaria)

187. Vîrfurile unui poligon cu $n + 1$ laturi sînt situate pe laturile unui poligon regulat cu n laturi astfel ca perimetrul poligonului cu n laturi să fie împărțit în părți egale. Să se găsească aceste puncte astfel ca aria poligonului cu $n + 1$ laturi să fie : a) maximă, b) minimă.

(Olanda)

188. Se dau numerele întregi și pozitive x_1, x_2, x_3, x_4 și x_5 care satisfac relațiile :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1\,000, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 > 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 > 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 > 0. \end{cases}$$

a) Să se găsească cea mai mare valoare a puterii $(x_1 + x_3)^{x_2 + x_4}$.

b) Să se stabilească în câte moduri se poate alege x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , astfel ca pentru aceste valori să se atingă această valoare maximă.

(Olanda)

189. Un băiat a construit pentru trenul său jucărie o rețea închisă de linii ferate fără încrucișări și neavînd nici o șină în formă de segment de dreaptă. Rețeaua se compune din mai multe șine care au forma aceluiași sfert de cerc. Unele dintre acestea sînt parcurse în sensul acelor de ceasornic iar celelalte în sensul opus. Să se arate că în rețea există un număr par din fiecare aceste două tipuri de șine, iar numărul tuturor șinelor din rețea este multiplu de patru.

(Olanda)

190. Fie h_n apotema poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul de rază R . Să se demonstreze că $(n+1)h_{n+1} - nh_n > R$.

[](Bulgaria)

191. Să se determine raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ale cărui laturi au lungimile date de rădăcinile ecuației de gradul al doilea $x^2 - ax + b = 0$.

(Mongolia)

192. Se dă polinomul $f(x)$ care are coeficienții numere întregi, iar pentru $k \in \mathbb{Z}$ (k fixat), $f(k)$, $f(k+1)$ și $f(k+2)$ sînt multipli de 3. Să se arate că $f(m)$ este multiplu de 3, oricare ar fi numărul întreg m .

(Polonia)

193. Se dau trei numere întregi și pozitive x_1, x_2 și x_3 care satisfac condițiile $x_1 x_2 x_3 > 1$ și $x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

Să se demonstreze că :

- a) nici unul dintre aceste numere nu este egal cu 1;
- b) unul și numai unul dintre acestea este mai mic decât 1.

(Iugoslavia)

194. Un parc în formă de pentagon convex are aria $S = 5\sqrt{3} \cdot 100^2$. Un vizitator al parcului, aflat în punctul interior O al acestuia, a observat că nu se găsește la o distanță mai mare de 200 m față de orice vîrf al pentagonului. Să se demonstreze că el nu se găsește la o distanță mai mică decât 100 m față de orice punct situat pe laturile pentagonului.

(Iugoslavia)

195. Se dau numerele întregi nenegative k_1, k_2, \dots, k_n ($n \geq 2$). Să se demonstreze inegalitatea

$$k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n! \geq \left(\left[\frac{k}{n} \right]! \right)^n, \quad k = k_1 + k_2 + \dots + k_n,$$

iar $[x]$ este partea întreagă a numărului x .

(Cehoslovacia)

196. Să se arate că ecuația $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$ nu admite soluții formate din numere întregi.

(Bulgaria)

197. Să se determine toate funcțiile $f: R \rightarrow R$ care satisfac condiția :

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y),$$

oricare ar fi numerele reale x și y . Să se demonstreze că printre aceste funcții se găsesc numai două funcții continue.

(Bulgaria)

198. Peste un pătrat avînd lungimea laturii de 38 cm se așază 100 de poligoane convexe, ale căror arie și perimetru nu depășesc pentru fiecare $\pi \text{ cm}^2$, respectiv $2\pi \text{ cm}$. Să se demonstreze că peste pătrat se mai poate suprapune un cerc de rază 1 care nu intersec-tează nici unul din poligoanele de mai sus.

(Bulgaria)

199. Să se găsească sfera de rază maximă, care încapă în fiecare din tetraedrele care au toate înălțimile de lungime mai mare sau egală cu 1.

(Iugoslavia)

200. Se consideră semidreptele OX , OY , OZ și un punct G situat în interiorul unghiului $OXYZ$. Să se arate cum se poate construi un plan care să treacă prin punctul G și să intersecteze pe OX , OY , OZ în punctele A , B , respectiv C , astfel ca volumul tetraedrului $OABC$ să fie minim.

(România)

201. Să se stabilească dacă numărul $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ este sau nu rațional.

(Franța)

202. Să se găsească locul geometric al centrelor unui cerc de rază 1 atunci când acesta este așezat într-un colț al camerei în toate pozițiile posibile astfel ca să fie tangent atât la planul podelei cât și la cei doi pereți verticali perpendiculari unul pe celălalt.

Observație. Pentru a rezolva această problemă este utilă cunoașterea următoarei teoreme a lui Monge: „Locul geometric al punctelor din care se duc tangente perpendiculare între ele la elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ este un cerc numit cercul lui Monge și avînd ecuația $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ”.

(Franța)

203. Se dă sfera plină K . Să se găsească locul geometric al vîrfurilor A ale tuturor paralelogramelor $ABCD$ pentru care diagonala $AC \leq BD$, diagonala BD fiind conținută în întregime în sfera plină K .

(Cehoslovacia)

204. Fie cinci puncte $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) avînd coordonatele întregi. Să se demonstreze că printre triunghiurile care au vîrfurile în aceste puncte se găsesc cel puțin trei care au arii exprimate prin numere întregi.

(Bulgaria)

205. Se dă tetraedrul $ABCD$. Fie $x = AB \cdot CD$, $y = AC \cdot BD$ iar $z = AD \cdot BC$. Să se demonstreze că există un triunghi avînd laturile de lungime x , y , respectiv z .

(Polonia)

206. Fie a un număr real nenul. Pentru fiecare număr întreg n se calculează expresia $S_n = a^n + a^{-n}$. Să se demonstreze că dacă sumele S_k și S_{k+1} calculate pentru un anumit număr întreg k sînt numere întregi, atunci sumele S_n vor fi numere întregi pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

(Vietnam)

207. Să se arate că numărul $2^{147} - 1$ este divizibil prin 343.

(Finlanda)

208. Se dau trei numere reale x, y, z diferite în modul de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ și care satisfac condiția $x + y + z = xyz$. Să se demonstreze că are loc în acest caz egalitatea

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

(Cuba)

209. Cu ajutorul unui alfabet de trei litere se formează toate cuvintele posibile, unele combinații de două sau mai multe litere fiind însă interzise. Se știe că aceste combinații interzise au lungimi diferite între ele. Să se arate că se pot forma cuvinte oricît de lungi care să nu cuprindă combinații interzise de litere.

(U.R.S.S.)

210. Suma pătratelor a cinci numere a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 este egală cu 1. Să se demonstreze că cea mai mică dintre valorile $(a_i - a_j)^2$ ($1 \leq i \neq j \leq 5$) nu depășește $\frac{1}{10}$.

(U.R.S.S.)

211. Să se afle numărul de soluții întregi (i, j, k, m) pentru sistemul de inegalități:

$$1 \leq -j + k + m \leq n, \quad 1 \leq i - j + m \leq n,$$

$$1 \leq i - k + m \leq n, \quad 1 \leq i + j - k \leq n.$$

Se cunoaște că sînt satisfăcute inegalitățile $1 \leq i, j, k, m \leq n$, iar n este un număr întreg dat.

(R.D.G.)

212. Fie $A_0B_0C_0D_0$ un patrulater convex, iar O un punct situat în interiorul acestuia. Se definesc prin recurență patrulateralele $A_nB_nC_nD_n$ astfel: A_{n+1} este piciorul perpendicularei din O pe A_nB_n , B_{n+1} este piciorul perpendicularei duse din O pe B_nC_n , iar C_{n+1} și D_{n+1} sînt picioarele perpendicularelor duse din O pe C_nD_n , respectiv pe D_nA_n . Să se arate că patrulateralele $A_0B_0C_0D_0$ și $A_4B_4C_4D_4$ sînt asemenea.

(Anglia)

213. Se consideră rețeaua punctelor din plan care au ambele coordonate numere întregi. Fiecare punct din această rețea are patru vecini: sus, jos, la dreapta și la stînga. Fie K un cerc de rază $r \geq 2$, care nu trece prin nici un punct al rețelei. Prin punct frontieră interior se va înțelege un punct din rețea, situat în interiorul cercului, dar care are cel puțin un vecin în exteriorul cercului. În mod analog se definesc punctele frontieră exterioare. Să se arate că numărul de puncte frontieră exterioare este cu 4 mai mare decît numărul punctelor de frontieră interioare.

(Cehoslovacia)

214. Să se determine toate mulțimile închise și mărginite din plan, care odată cu două puncte conțin un întreg semicerc avînd extremitățile în cele două puncte.

(R.F.G.)

215. Să se arate că următorul algoritm generează o succesiune $w_0, w_1, \dots, w_{2^n-1}$ formată din toate numerele întregi nenegative care nu depășesc pe $2^n - 1$ scrise în sistem binar:

$$w_0 = \underbrace{00\dots 0}_n, \quad n \text{ cifre}$$

iar dacă $w_{m-1} = a_1 \dots a_n$ și j este cel mai mare număr care nu este mai mic decît 1 pentru care m se divide la 2^{j-1} , atunci w_m se obține din w_{m-1} înlocuind pe a_j cu $1 - a_j$.

(R.F.G.)

216. Să se determine numerele $n \geq 1$, astfel încît să existe două polinoame f și g , în n variabile, cu coeficienți întregi, neidentice nule, astfel încît să fie satisfăcută relația

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2).$$

(Ungaria)

217. Se consideră toate succesiunile finite (a_1, a_2, \dots, a_n) formate din termeni a_k , astfel ca $|a_k| = 1$, și se definește produsul a două astfel de succesiuni prin $(a_1, a_2, \dots, a_n) (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$. Fie B o mulțime formată din k astfel de succesiuni. Să se arate că există o succesiune c de acest tip cu proprietatea ca intersecția mulțimii B cu mulțimea formată din toate produsele succesiunii c cu toate succesiunile din B să conțină cel mult $\frac{k^2}{2^n}$ elemente.

(Polonia)

218. Fie E o mulțime de puncte în spațiu, nesituate toate în același plan și astfel încât oricare trei dintre ele să nu fie situate pe o aceeași dreaptă. Să se arate că dacă nu există nici un plan care să conțină exact trei puncte din E , atunci există în E cinci puncte care să constituie vîrfurile unei piramide patrulateră convexe, piramidă care să nu conțină nici un alt punct al lui E .

(Finlanda)

219. Fie numărul întreg $n \geq 2$. Se definește $x_1 = n$, $y_1 = 1$, $x_{i+1} = \left\lfloor \frac{x_i + y_i}{2} \right\rfloor$, $y_{i+1} = \left\lfloor \frac{n}{x_{i+1}} \right\rfloor$. Să se arate că $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

(Olanda)

220. Să se determine cel mai mare număr n pentru care există în plan n puncte, avînd coordonatele numere întregi, astfel încît să nu existe printre acestea trei al căror centru de greutate să aibă toate coordonatele numere întregi.

(Vietnam)

PROBLEME DATE LA OLIMPIADE NAȚIONALE

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN ANGLIA

221. O placă de lemn în formă de pătrat se taie în n^2 pătrate avînd fiecare aria egală cu 1. Cu ajutorul acestora se formează patru dreptunghiuri și rămîne un pătrat de arie 1. Cele nouă dimensiuni ale acestor figuri sînt diferite între ele.

a) Să se găsească cea mai mică valoare a lui n care satisface condițiile din problemă și să se determine pentru acest caz cele nouă dimensiuni ale figurilor din enunț.

b) Să se găsească toate valorile lui n care satisfac condițiile problemei.

222. Să se determine funcția $f: R \rightarrow R$ care nu este identic nulă și satisface condiția

$$f(x)f(y) = f(x - y),$$

oricare ar fi numerele reale x și y .

223. Se dă o mulțime formată din $n + 1$ numere întregi pozitive, astfel încât nici unul din aceste numere nu depășește pe $2n$. Să se demonstreze că cel puțin un element al mulțimii se divide la un altul.

224. Să se demonstreze că nici un poliedru convex nu poate avea toate fețele hexagonale.

225. O piesă pentru jocul de domino poate fi reprezentată printr-o pereche neordonată de numere întregi pozitive. Astfel, perechea $(1, 5)$ reprezintă aceeași piesă ca și perechea $(5, 1)$. Mulțimea formată din 15 piese care se reprezintă prin perechi de numere întregi de la 1 la 5 se descompune în trei submulțimi de câte cinci piese fiecare, astfel încât piesele fiecărei submulțimi pot fi așezate într-un lanț închis, adică sub forma $(a, b) (b, c) (c, d) (d, e) (e, a)$, numerele a, b, c, d, e nefiind neapărat diferite între ele. Să se determine în câte moduri se poate face o astfel de descompunere. Ordinea submulțimilor în descompunere nu este esențială.

226. Se consideră toate triunghiurile pentru care raza cercului înscris este r . În aceste triunghiuri se înscriu pătrate (a căror latură este x). Să se demonstreze că

$$2r > x > \sqrt{2} r.$$

227. Un coridor lung, de lățime egală cu 1, are forma literei L. O țevă metalică lungă (al cărei diametru poate fi neglijat) este trasă pe coridor rămânând tot timpul în planul podelei. Știind că țeava se poate curba, prin lungimea sa se înțelege distanța între capetele sale când ia forma unui segment de dreaptă. Să se găsească lungimea maximă a țevii astfel ca să poată fi trasă pe coridor, de-a lungul pereților și curbând-o la colțul coridorului, fără a o ridica de la podea.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN BULGARIA

228. Să se demonstreze că dacă a este un număr întreg care nu se divide la 5, polinomul $f(x) = x^5 - x + a$ nu se poate descompune în produs a două polinoame cu coeficienți întregi.

229. Se scriu toate numerele compuse din trei cifre date x, y, z , diferite între ele. Să se determine x, y, z știind că suma tuturor acestor numere este de trei ori mai mare decât numărul de trei cifre egale toate cu x .

230. Să se rezolve inecuația

$$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{4}{x} + \frac{15}{2(x+1)} \geq 1.$$

231. Să se demonstreze că, dacă α, β și γ sînt măsurile unghiurilor unui triunghi oarecare, are loc identitatea

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

232. Să se construiască un triunghi asemenea cu un triunghi dat, astfel ca unul din vîrfurile sale să fie într-un punct dat, iar celelalte două vîrfuri să se afle pe o dreaptă dată, respectiv pe un cerc dat.

233. Să se arate că dacă un tetraedru regulat este secționat cu un plan paralel cu două muchii opuse, atunci :

- a) secțiunea este un dreptunghi,
- b) perimetrul secțiunii nu depinde de poziția planului de secțiune luat în condițiile menționate.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN CEHOSLOVACIA

234. Se dă un triunghi dreptunghic isoscel APQ avînd ipotenuza AP . Să se construiască pătratul $ABCD$ astfel încît dreptele BC și CD să treacă prin punctele P , respectiv Q . Să se exprime lungimea laturii pătratului $ABCD$ cu ajutorul lungimii a a catetei triunghiului dat.

235. Să se determine toate numerele naturale n astfel încît $2^n - 1$ să fie putere a unui număr natural (exponentul acestei puteri este un număr natural mai mare decît 1).

236. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ale cărui catete CB și CA verifică inegalitatea $CB < CA$. Să se găsească locul geometric al punctelor X situate în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC astfel încât să fie îndeplinite condițiile:

$$XA \geq XB \geq XC \text{ și } x_1 \geq x_2 \geq x_3.$$

Prin x_1 , x_2 și x_3 au fost notate distanțele de la punctul X la laturile BC , CA , respectiv AB ale triunghiului ABC .

237. Cercurile k_1 și k_2 au aceeași rază și se intersectează în punctele P și Q care nu se confundă. Prin punctul P se duce o dreaptă care intersectează ambele cercuri în punctele X , respectiv Y , situate de o parte și de cealaltă a punctului P .

a) Să se găsească locul geometric al mijloacelor laturilor triunghiului QXY .

b) Să se determine figura descrisă de centrele cercurilor circumscrise triunghiului QXY .

238. Să se construiască graficul funcției $f: [-2, 2] \rightarrow R$,

$$f(x) = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|)$$

și să se demonstreze că acesta este format din două segmente de dreaptă și dintr-un segment de cerc.

239. Se dă trapezul $ABCD$ avînd baza AB . Să se construiască punctele P și Q situate în interiorul segmentului AD , respectiv BC , astfel ca $PQ \parallel AB$ și $AQ \parallel PC$. Să se exprime lungimile lui AP și BQ prin lungimile laturilor trapezului dat.

240. Să se calculeze suma

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos (n-1) \cos n},$$

știind că n este număr întreg pozitiv.

241. Să se demonstreze că în cazul în care între muchiile tetraedrului $ABCD$ există relația

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2,$$

cel puțin una din fețele tetraedrului este triunghi ascuțitunghic.

242. Se dau numerele pozitive a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$). Să se găsească toate soluțiile reale ale sistemului de ecuații

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a_1, \\ x_2 x_3 = a_2, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n-1} x_n = a_{n-1}, \\ x_n x_1 = a_n. \end{cases}$$

243. Să se găsească toate tripletele de numere prime a, b, c , care satisfac inegalitatea

$$abc < ab + bc + ca.$$

244. Într-o piramidă patrulateră lungimea unei muchii laterale este x , iar lungimile celorlalte muchii sînt egale cu 1.

a) Să se exprime volumul piramidei în funcție de x .

b) Să se determine valoarea lui x pentru care volumul piramidei este maxim.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN R.D.G.

245. Să se demonstreze că triunghiul ale cărui unghiuri au mărimea α, β și γ este dreptunghic dacă și numai dacă are loc relația

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1.$$

246. Să se demonstreze că $n^3 + 3n^2 - n - 3$ se divide la 48, oricare ar fi numărul natural impar n .

247. Să se stabilească, fără a calcula radicalii, care dintre numerele $z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ și $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$ este mai mare.

248. Să se reconstituie calculul de mai jos știind că fiecare literă sau punct reprezintă cifre de la 0 la 9 ($A \neq 0$), iar literele diferite reprezintă cifre diferite.

$$\begin{array}{r} \text{A T O M} \times \text{A T O M} \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \text{A T O M} \end{array}$$

249. a) Să se demonstreze că restul împărțirii unui număr prim la 30 este sau 1 sau un număr prim.

b) Să se verifice valabilitatea acestei afirmații pentru cazul când se împarte un număr prim la 60.

250. Să se demonstreze că, dacă cel puțin unul din numerele reale a , b , c este diferit de zero, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Care este cazul când are loc egalitatea?

251. Se dă un tetraedru oarecare avînd fețele triunghiuri echivalente. Să se demonstreze că în acest caz centrele sferelor înscrise și circumscrise tetraedrului coincid.

252. Să se determine toate numerele reale a pentru care ecuația

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

are cel puțin o soluție reală. Să se găsească toate soluțiile ecuației în cazul când $a = \frac{5}{6}$.

253. O mulțime M se numește semigrup dacă în această mulțime este definită o operație care asociază în mod unic fiecărei perechi ordonate (u, v) de elemente din M un element w din M (se scrie $u \circ v = w$) și dacă această operație este asociativă, adică pentru oricare trei elemente din M are loc egalitatea $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.

Fie c un număr real pozitiv iar M mulțimea tuturor numerelor nenegative mai mici decît c . Pentru orice pereche de numere din M

se definește următoarea operație: $u \circ v = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$.

a) Să se demonstreze că M este semigrup față de această operație.

b) Să se cerceteze dacă M este un semigrup regulat, adică dacă din $u \circ v_1 = u \circ v_2$ rezultă totdeauna $v_1 = v_2$, iar din $u_1 \circ v = u_2 \circ v$ rezultă totdeauna $u_1 = u_2$.

254. Trei secții W_1 , W_2 și W_3 ale unei uzine și o stație de cale ferată sînt situate pe un teren plan. Punctele W_1 , W_2 și W_3 nu aparțin aceleiași drepte și sînt unite prin drumuri rectilinii date de segmentele W_1W_2 , W_2W_3 și W_3W_1 . Stația de cale ferată este așezată în interiorul triunghiului $W_1W_2W_3$, la distanță egală de cele trei dru-

muri, fiind legată de cele trei secții prin drumuri rectilinii date de segmentele BW_1 , BW_2 și BW_3 . Se știe că $W_2W_3 < W_3W_1 < W_1W_2$.

Să se stabilească cel mai scurt itinerar al unui autobuz care trebuie să plece de la stație la cele trei secții, iar apoi să se întoarcă din nou la stație, folosind tot timpul numai drumurile care au fost arătate mai înainte.

255. Pentru aproximarea rădăcinii pătrate a unui număr se folosește frecvent formula $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, a și b fiind numere reale pozitive.

a) Să se demonstreze că eroarea $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2 + b}$ făcută în această aproximare satisface inegalitatea $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$.

b) Să se deducă o formulă analoagă de aproximare pentru $\sqrt[3]{a^3 + b}$ și să se evalueze eroarea.

În aplicațiile practice se alege b relativ mic. Cum se găsește o evaluare mai simplă, dacă a^3 și b sînt numere întregi care satisfac inegalitatea $a^3 < a^3 + b < (a + 1)^3$?

c) Să se aproximeze cu ajutorul formulelor de mai sus numerele $\sqrt[3]{56}$ și $\sqrt[3]{80}$.

256. Se dă o sferă de lemn, un compas care poate fi folosit și în plan și pe sferă, un creion, o riglă (fără gradații) și o coală (plană) de hîrtie. Să se traseze pe coala de hîrtie un segment de lungimea razei sferei.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN IUGOSLAVIA

257. Se dă tetraedrul $OABC$, în care $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90^\circ$.

a) Să se demonstreze că vîrfurile O al tetraedrului, centrul de greutate T al feței ABC și centrul S al sferei circumscrise tetraedrului sînt situate pe o aceeași dreaptă.

b) Să se demonstreze că mărimile $\text{ctg } \alpha$, $\text{ctg } \beta$, $\text{ctg } \gamma$ sînt proporționale respectiv cu a^2 , b^2 și c^2 . S-a făcut notațiile $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ și $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

258. Latura bazei unei prisme patrulatere regulate este $2a$, iar înălțimea sa este $a(1 + \sqrt{3})$. Se consideră sfera care trece prin

vîrfurile uneia din bazele prisme și este tangentă la cealaltă bază a prisme. Să se găsească aria porțiunii de prismă aflată în interiorul sferei.

259. În fața unui înțelept miop, la o distanță de d m, este situat un obiect. Înțeleptul vede numai obiectele așezate la o distanță mai mică de 1 m față de el. El a pus pariu că poate găsi obiectul făcînd mai puțin decît $\frac{3}{2}d + 7$ pași, cu condiția ca, după fiecare pas al său (lung de 1 m), să i se spună „aproprie-te”, sau „nu te apropia”. Obiectul se consideră găsit dacă înțeleptul a ajuns la o distanță mai mică de 1 m față de acesta, adică atunci cînd îl poate vedea. Să se demonstreze că înțeleptul poate cîștiga pariul.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN POLONIA

260. Se dau punctele A , B și cercul K . Să se construiască un cerc, care să treacă prin punctele A și B și să aibă în comun cu cercul dat K o coardă de lungime dată q .

261. Să se găsească numărul x format din trei cifre, astfel ca numărul scris cu aceleași cifre ca x , însă într-o bază diferită de 10 să fie de două ori mai mare decît x .

262. Să se demonstreze că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 3$, are loc inegalitatea

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}.$$

263. În punctul A al cercului k se duce perpendiculara AB pe planul cercului. Să se găsească locul geometric al proiecțiilor punctului A pe dreptele BM , unde M este un punct oarecare al cercului k .

264. În patrulaterul convex $ABCD$ suma $AB + BD$ nu depășește suma $AC + CD$. Să se demonstreze că în acest caz lungimea laturii AB este mai mică decît lungimea diagonalei AC .

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN ROMÂNIA

265. Să se demonstreze că ecuația $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ are rădăcinile

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}, \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \text{ și } \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8}.$$

272. Fie n numere reale x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) care verifică relațiile

$$a(1 + x_i) \geq (a + 1)x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{n+1} = x_1, \quad \sum_{i=1}^n x_i \geq na,$$

a fiind un număr real diferit de $-1, 0, -\frac{1}{2}$. Să se arate că numerele x_i sînt egale între ele.

273. Să se arate că ecuația

$$\sqrt{a + bx} + \sqrt{b + cx} + \sqrt{c + ax} = \sqrt{b - ax} + \sqrt{c - bx} + \sqrt{a - cx}$$

($a > 0, b > 0, c > 0$) nu are altă rădăcină în afară de $x = 0$.

274. Pe arcul BC , căruia nu îi aparține punctul A , al cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC , cu unghiul drept în A , se consideră un punct M . Fie P , respectiv Q simetricul punctului M față de dreapta AB , respectiv AC .

a) Să se arate că punctele P, A, Q sînt coliniare.

b) Să se determine poziția punctului M , astfel încît lungimea segmentului PQ să fie maximă.

c) Să se arate că dacă dreapta PQ este tangentă la cerc în A , atunci punctul M este simetricul lui A față de dreapta BC și, reciproc, dacă punctul M este simetricul lui A față de dreapta BC , atunci dreapta PQ este tangentă la cerc în punctul A .

d) Să se arate că dacă patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil, atunci $AM = BM$ și, reciproc, dacă $AM = BM$, patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil.

275. Fie x_1 și x_2 rădăcinile reale ale ecuației $2x^2 + 2mx + (m + 1)^2 = 0$, m fiind un parametru real.

a) Să se stabilească mulțimile de valori pe care le pot lua fiecare din expresiile: $S_1 = x_1 + x_2$, $P = x_1x_2$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2$.

b) Să se afle valorile extreme care pot fi luate de rădăcinile x_1 și x_2 .

c) Să se rezolve ecuația în fiecare din cazurile particulare:

1) $x_1x_2 = 2$; 2) $x_1 = 2x_2$; 3) $x_1 - x_2 = 1,4$.

d) Dacă n este număr natural, expresia $E_n = (3 + 5)^n + (3 - 5)^n$ se divide cu 2^n , iar E_{2n+1} se divide și cu 3.

276. Se dau n numere reale care satisfac inegalitățile: $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$. Să se arate că aceste numere satisfac inegalitatea

$$\frac{(x_3 + x_4 + \dots + x_n)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{(x_1 + x_4 + \dots + x_n)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \dots$$

$$\dots + \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} + \frac{(x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1})(x_n - x_1)}{x_n + x_1} \geq 0.$$

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN SUECIA

277. Dacă a_1, a_2, \dots, a_n este o permutare a numerelor $1, 2, \dots, n$, să se demonstreze că dacă n este un număr impar, rezultă că produsul $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$ este un număr par.

278. Să se determine polinomul $P(x)$ cu coeficienți întregi, astfel încât să se anuleze pentru $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ și pentru $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

279. Să se arate că, oricare ar fi numărul real $x \geq \frac{1}{2}$, se poate găsi un număr întreg n astfel încât $|x - n^2| \leq \sqrt{x - \frac{1}{4}}$.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN S.U.A.

Prima olimpiadă

280. Prin (a, b, \dots, g) și $[a, b, \dots, g]$ se notează cel mai mare divizor comun și respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi pozitive a, b, \dots, g . Să se arate că

$$\frac{[a, b, c]^2}{[a, b][b, c][c, a]} = \frac{(a, b, c)^2}{(a, b)(b, c)(c, a)}.$$

281. Se dă tetraedrul isoscel $ABCD$, adică $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Să se demonstreze că toate fețele tetraedrului $ABCD$ sînt triunghiuri ascuțitunghice.

282. Se alege la întâmplare unul din numerele $1, 2, \dots, 9$. Obținerea oricăruia din acestea este egal posibilă. Să se găsească probabilitatea ca atunci, când se aleg succesiv n numere, produsul acestora să fie multiplu de 10.

283. Fie r un număr rațional nenegativ. Să se găsească numerele întregi a, b, c, d, e, f , astfel ca, oricare ar fi r , să fie adevărată inegalitatea

$$\left| \frac{ar^2 + br + c}{dr^2 + er + f} - \sqrt[3]{2} \right| < |r - \sqrt[3]{2}|.$$

284. Pentagonul convex $ABCDE$ are proprietatea că aria fiecăruia din triunghiurile BCD, CDE, DEA și EAB este egală cu 1. Să se demonstreze că toate pentagoanele care au această proprietate au arii egale și că există infinit de multe pentagoane cu această proprietate, distincte între ele.

A doua olimpiadă

285. Punctele P și Q se găsesc în interiorul tetraedrului $ABCD$. Să se demonstreze că $\angle PAQ < 60^\circ$.

286. Fie șirurile de numere întregi $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ definite prin recurență :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}, \\ y_0 &= 1, \quad y_1 = 7, \quad y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Să se demonstreze că singura valoare comună a termenilor de același rang din cele două șiruri este 1.

287. Se aleg arbitrar trei vîrfuri ale unui poligon regulat cu $2n + 1$ laturi. Considerînd toate alegerile de acest fel ca egal posibile, să se găsească probabilitatea ca centrul poligonului să fie situat în interiorul triunghiului format de cele trei puncte astfel alese.

288. Să se găsească toate rădăcinile reale sau complexe ale sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

289. Să se demonstreze că rădăcinile cubice a trei numere prime diferite nu pot constitui trei termeni (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii aritmetice.

A treia olimpiadă

290. Fie a, b, c trei numere întregi diferite între ele, iar P un polinom cu coeficienți întregi. Să se arate că nu pot fi îndeplinite simultan egalitățile $P(a) = b$, $P(b) = c$ și $P(c) = a$.

291. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c , este adevărată inegalitatea

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

292. Două puncte situate pe o sferă de rază 1 se unesc cu un arc de cerc de lungime mai mică decât 2 și situat în interiorul sferei. Să se arate că acest arc de cerc se află în întregime în una din emisfere.

293. Tatăl, mama și cu fiul au organizat un concurs în familie, la fiecare joc participând doi adversari. Deoarece tatăl este cel mai slab jucător, i se dă posibilitatea de a stabili prima pereche de jucători. Învingătorul în primul joc întâlnește în continuare jucătorul care a asistat la partida precedentă ș.a.m.d. Concursul este câștigat de jucătorul care a luat două partide. Deoarece fiul este jucătorul cel mai bun, se intuiește că tatăl își va mări șansele formînd prima pereche de jucători din el însuși și soția sa. Să se arate că, într-adevăr aceasta este cea mai bună strategie a sa. Se presupune că în timpul concursului nu se modifică probabilitatea cu care un jucător câștigă în fața altuia.

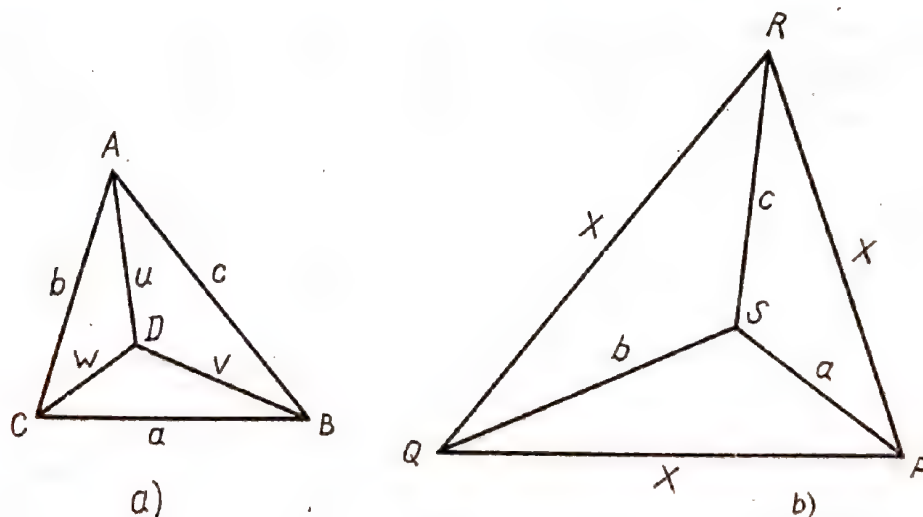


Fig. 1

294. Se dau triunghiurile PQR și ABC (fig. 1). În $\triangle ABC$, $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$. Să se arate că $x = u + v + w$.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN UNGARIA

295. Într-un triunghi ascuțitunghic este înscris un pătrat, astfel încît două vîrfuri ale sale sînt situate pe una din laturile triunghiului, iar celelalte două vîrfuri sînt fiecare situate pe laturile care au rămas. Să se demonstreze că centrul cercului înscris în triunghi se află în interiorul acestui pătrat.

296. La o olimpiadă matematică au fost date spre rezolvare cinci probleme. Printre concurenți nu se află doi care să fi rezolvat aceleași probleme. Dacă se lasă la o parte una din probleme, se poate găsi pentru oricare din concurenți un alt concurent care a rezolvat aceleași probleme ca și acesta, din cele patru probleme care au rămas. Se cere numărul participanților la olimpiadă.

297. Să se demonstreze că ortocentrul unui triunghi se află mai aproape de acea latură a triunghiului, dintre două laturi date, care are lungimea mai mică.

298. Să se determine numerele a, b, c , astfel ca să fie adevărată identitatea

$$x^3 - ax^2 + bx - c \equiv (x - a)(x - b)(x - c).$$

299. Să se pună sub formă de produs expresia

$$[(a - c)^2 + (b - d)^2](a^2 + b^2) - (ad - bc)^2.$$

300. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are trei unghiuri obtuze, diagonala corespunzătoare celui de-al patrulea unghi este mai lungă decît oricare altă diagonală a patrulaterului.

301. Se presupune că următoarele propoziții sînt adevărate:

a) există posesori de televizoare care nu sînt zugravi.

b) persoanele care frecventează zilnic ștrandul, însă nu sînt zugravi, nu au televizor.

Se cere să se stabilească dacă din aceste propoziții rezultă sau nu propoziția:

c) nu toți posesorii de televizoare frecventează zilnic ștrandul.

302. Se dă punctul fix P situat în interiorul unui cerc și punctul Q mobil pe acest cerc. Diametrul perpendicular pe PQ intersectează în punctul M tangenta în Q la cerc. Să se găsească locul geometric descris de punctul M , cînd punctul Q parcurge cercul.

303. Să se determine numerele reale a, b, c , pentru care

$$|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leq 1,$$

în condițiile $|x| \leq 1$, iar valoarea expresiei $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ este maximă.

304. Să se determine numerele nenegative k și l astfel ca valoarea expresiei

$$\frac{k}{k+l} + \frac{n-k}{n-(k+l)}, \quad n \in N,$$

să fie maximă.

305. Fie x_1 un număr pozitiv, mai mic decât 1. Se formează prin recurență șirul $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, conform cu relația $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ ($k = 1, 2, \dots$). Să se demonstreze că, oricare ar fi n , inegalitatea

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$$

este adevărată.

306. Fie patrulaterul plan $ABCD$. Punctul A_1 este simetricul punctului A față de B , punctul B_1 este simetricul punctului B față de C , punctul C_1 este simetricul punctului C față de D , iar punctul D_1 este simetricul punctului D față de A . Să se construiască patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ dacă se cunosc punctele A_1, B_1, C_1, D_1 .

PROBLEME DATE LA OLIMPIADELE DIN U.R.S.S.

Probleme date la etapa finală a celei de-a patra olimpiade matematice din R.S.F.S.R.

307. Să se găsească mărimile unghiurilor unui triunghi, știind că două din înălțimile sale nu sînt mai mici decât laturile corespunzătoare lor.

308. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural m , $m(m+1)$ nu este putere a unui număr întreg (exponentul fiind mai mare ca 1).

309. Se calculează suma cifrelor pentru fiecare din numerele de la 1 la un miliard. Pentru fiecare număr din cele un miliard obținute se calculează din nou suma cifrelor, repetîndu-se aceste operații pînă cînd se obțin un miliard de numere formate din cîte

o singură cifră. Să se arate care din numerele 1 și 2 se repetă de mai multe ori în mulțimea de numere astfel obținută.

310. Hexagonul convex $ABCDEF$ are toate unghiurile egale.

a) Să se demonstreze că $AB - DE = FE - BC = DC - FA$.

b) Să se demonstreze propoziția reciprocă: fiind date șase segmente de lungimi a_1, a_2, \dots, a_6 astfel ca $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, se poate construi un hexagon convex cu unghiuri egale și avînd aceste segmente drept laturi.

311. Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației

$$\underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}}}_{1964} = y.$$

312. Prin vîrfurile unui patrulater convex oarecare se duc perpendicularele pe diagonalele sale. Să se demonstreze că picioarele acestor perpendiculare formează un patrulater asemenea cu cel dat.

313. Să se găsească toate numerele naturale impare n , astfel ca $(n-1)!$ să nu se dividă cu n^2 .

314. Fie O centrul cercului înscris în patrulaterul $ABCD$. Să se demonstreze că $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$.

315. Fie numerele naturale a, b și n . Se știe că pentru orice număr natural k ($k \neq b$), $k^n - a$ se divide la $k - b$. Să se demonstreze că $a = b^n$.

316. Să se găsească cel mai mare pătrat perfect cu proprietatea că prin ștergerea ultimelor două cifre ale sale rămîne tot un pătrat perfect. Se presupune că cel puțin una din cele două cifre care se șterg nu este zero.

317. Se consideră o acoperire a planului cu ajutorul unei rețele de hexagoane regulate de latură 1. Un gîndac se mișcă pe liniile rețelei între punctele A și B , după drumul cel mai scurt, a cărui lungime este 100 m. Să se demonstreze că jumătate din drumul său este parcurs în același sens.

318. În expresia $x_1 : x_2 : \dots : x_n$, pentru a indica ordinea efectuării operațiilor, se așază paranteze, punindu-se expresia sub forma

unei fracții $\frac{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{n-k}}}$; de exemplu $[x_1 : (x_2 : x_3)] : x_4 = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4}$

sau $[(x_1 : x_2) : x_3] : x_4 = \frac{x_1}{x_2 x_3 x_4}$.

Se cere să se determine numărul de astfel de fracții obținute din expresia $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ așezind parantezele în toate modurile posibile.

319. Să se găsească numărul minim de tetraedre în care poate fi descompus un cub.

320. Se consideră mulțimea formată din n numere întregi distincte două câte două: a_1, a_2, \dots, a_n ($n > 2$). Din această mulțime se obține o altă mulțime de n numere: $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$.

Să se demonstreze că, dacă se continuă aplicarea procedurii de un număr finit de ori, se obține o mulțime care nu mai este compusă numai din numere întregi.

321. Fie $ABCD$ trapezul circumscris unui cerc, E punctul de intersecție al diagonalelor sale și r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile BAE, BCE, CDE și DAE . Să se arate că

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

Probleme date la cea de-a șaptea olimpiadă unională

322. La un proces instanței îi sînt prezentate, drept probe materiale, 14 monede. La dispoziția expertului tribunalului se află numai o balanță fără greutate.

a) Să se arate cum poate demonstra expertul instanței că primele șapte monede sînt false, numai prin trei cîntăriri, știind că monedele false au aceeași greutate și cele veritabile sînt egale ca greutate, cele false fiind mai ușoare.

b) Să se arate că, în aceleași condiții, expertul poate demonstra mai mult și anume că restul de monede sînt veritabile.

323. În componența unui număr de nouă cifre intră toate cifrele, în afară de zero. Știind că numărul se termină în cifra 5, să se arate că acesta nu poate fi pătrat perfect.

324. Să se demonstreze că n puncte ($n > 4$) pot fi unite prin săgeți, astfel încît să se poată ajunge dintr-un punct în altul urmînd una sau două săgeți (oricare pereche de puncte poate fi unită prin o singură săgeată; deplasarea în sens contrar săgeții este interzisă).

325. Pe laturile triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în afara acestuia, trei triunghiuri ascuțitunghice asemenea între

ele AC_1B , BA_1C și CB_1A ($\angle ABC_1 = \angle A_1BC$, $\angle BCA_1 = \angle B_1CA$, $\angle CAB_1 = \angle C_1AB$).

a) Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor AC_1B , BA_1C și CB_1A se intersectează într-un punct

b) Să se demonstreze că dreptele AA_1 , BB_1 și CC_1 se intersectează în acel punct.

326. Să se arate că, oricare ar fi N , se poate face cunoștință la N persoane care nu se cunosc între ele, astfel ca oricare trei să nu aibă același număr de cunoscuți.

327. Într-o partidă de șah regele a parcurs tabla de șah de 8×8 pătrățele ocupând fiecare câmp o singură dată și revenind prin ultima mutare la poziția inițială (regele se deplasează după regulile obișnuite). Unind centrele câmpurilor ocupate succesiv de rege, se obține o linie poligonală fără autointersecții. Care este cel mai lung și care este cel mai scurt drum pe care îl poate parcurge regele astfel?

328. Fie un unghi cu vârful în O și un cerc tangent la laturile sale în punctele A și B . Semidreapta dusă din A paralelă la OB intersectează acest cerc în punctul C . Segmentul OC intersectează cercul în punctul E , iar dreptele AE și OB se intersectează în punctul K . Să se demonstreze că $OK = KB$.

329. Se dau numerele reale a, b, c , astfel încît pentru toate valorile lui x care satisfac condiția $-1 \leq x \leq 1$ este îndeplinită egalitatea

$$|ax^2 + bx + c| \leq 1.$$

Să se demonstreze că pentru aceste valori ale lui a, b, c este adevărată și inegalitatea

$$|cx^2 + bx + a| \leq 2.$$

330. O federație de tenis a acordat tuturor jucătorilor săi calificative: celui mai bun calificativul 1, următorului calificativul 2 ș.a.m.d. Se știe că în întîlnirile dintre jucători ale căror calificative diferă mai mult decît două puncte, învinge întotdeauna jucătorul cu calificativul mai mic. Un concurs la care participă cei mai buni 1024 jucători se desfășoară după sistemul olimpic: concurenții sînt împărțiți prin tragere la sorți în perechi și după desfășurarea primei etape este promovat învingătorul din fiecare pereche, astfel încît după fiecare etapă numărul concurenților se reduce la jumătate. În acest mod, după cea de-a zecea etapă este desemnat cîștigătorul concursului. Se cere calificativul maxim al acestuia.

331. Un triunghi are laturile de lungime a, b, c ($a \geq b \geq c$) și aria 1. Să se arate că $b \geq \sqrt{2}$.

332. Se dă un punct în interiorul unui poligon convex cu n laturi neparalele două câte două. Să se arate că prin acest punct nu trec mai mult de n drepte care să împartă fiecare poligonul în două părți de arii egale.

333. Fie trinomul de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel ca ecuația $f(x) = x$ să nu aibă rădăcini reale. Să se demonstreze că nici ecuația $f[f(x)] = x$ nu are în acest caz rădăcini reale.

334. Pe o coală de hîrtie infinită, împărțită în carouri, n carouri sînt înnegrite. La momentele $t = 1, 2, \dots$ carourile se recolorează simultan după următoarea regulă: fiecare carou K ia culoarea pe care o aveau în momentul precedent majoritatea din o mulțime de carouri în care intră însuși caroul K și carourile cu care se învecinează sus și jos.

a) Să se demonstreze că într-un interval finit de timp pe coala de hîrtie nu mai rămîn carouri negre.

b) Să se demonstreze că aceste carouri negre nu dispar mai tîrziu de momentul $t = n$.

335. Să se demonstreze că dacă x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt numere pozitive, este satisfăcută inegalitatea

$$(x_1 + [x_2] + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

336. Se dau în spațiu n puncte care nu sînt situate în același plan. Cite paralelipipede distincte se pot forma, avînd vîrfurile în mulțimea de puncte dată?

3

REZOLVĂRI

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR OLIMPIADELOR INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

1. Fie $d \geq 1$ cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului pentru n oarecare. Atunci $21n + 4 = sd$; $14n + 3 = td$, de unde, eliminând pe n , se obține $(3t - 2s)d = 1$. Deoarece numărul $3t - 2s$ este întreg, iar $0 < \frac{1}{d} = 3t - 2s$, se deduce că $d = 1$.

Altă metodă de rezolvare. Se folosește algoritmul lui Euclid

$$\begin{array}{r|l} 21n + 4 & 14n + 3 \\ -14n - 3 & 1 \\ \hline 7n + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 14n + 3 & 7n + 1 \\ -14n - 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Numărătorul și numitorul au pe 1 ca cel mai mare divizor comun, oricare ar fi valoarea naturală atribuită lui n , adică sînt numere prime între ele, și, în consecință, fracția va fi ireductibilă.

2. Este necesar ca expresiile aflate sub radical să nu fie negative. Vom considera numai valorile lui x pentru care $x \geq \frac{1}{2}$, astfel ca $2x - 1 \geq 0$. Aceste valori ne asigură că și expresiile aflate sub ceilalți radicali nu sînt negative. Aceasta este evident pentru expresia $x + \sqrt{2x - 1}$. Din faptul că trinomialul de gradul al doilea

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

rezultă că $x^2 \geq 2x - 1$ și de aceea $x \geq \sqrt{2x - 1}$, deci

$$x - \sqrt{2x - 1} \geq 0, \text{ cu condiția } x \geq \frac{1}{2}.$$

Prin transformări succesive se obține

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{2x - 1} + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{2x - 1} + 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{2x - 1} + 1| \end{aligned}$$

și, analog,

$$\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sqrt{2x - 1} - 1|.$$

Se consideră funcția $f: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = y$, unde

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sqrt{2x - 1} + 1| + |\sqrt{2x - 1} - 1|). \end{aligned}$$

Se descompune domeniul de definiție al funcției f în două intervale:

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [1, +\infty).$$

Pe primul interval

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{2x - 1} + 1) + (-\sqrt{2x - 1} + 1)] = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Pe al doilea interval

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{2x - 1} + 1) + (\sqrt{2x - 1} - 1)] = \sqrt{2}\sqrt{2x - 1}.$$

Astfel, s-a demonstrat că

$$y = \sqrt{2} \text{ pentru } \frac{1}{2} \leq x < 1;$$

$$y = \sqrt{2} \sqrt{2x-1} \text{ pentru } 1 \leq x < +\infty, \text{ de unde rezultă că } y \geq \sqrt{2}.$$

Egalitățile din enunț vor avea loc pentru următoarele valori ale lui x :

a) $y = \sqrt{2}$ are loc pentru $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$;

b) $y = 1$ nu are loc pentru nici o valoare a lui x , deoarece $y \geq \sqrt{2}$;

c) $y = 2$ are loc pentru $x = \frac{3}{2}$, deoarece aceasta este singura soluție a ecuației $\sqrt{2} \sqrt{2x-1} = 2$.

3. Egalitatea dată se transcrie sub forma

$$a \cos^2 x + c = -b \cos x. \quad (1)$$

Atunci numerele a , b , c și $\cos x$ satisfac relația

$$4a^2 \cos^4 x + (4ac - 2b^2) 2 \cos^2 x + 4c^2 = 0, \quad (2)$$

care se obține din cea dată prin ridicare la pătrat și înmulțire cu 4. Funcția $\cos 2x$ este legată de $\cos x$ prin relația

$$2 \cos^2 x = \cos 2x + 1.$$

Înlocuind expresia (3) în egalitatea (2), se găsește

$$a^2(\cos 2x + 1) + (4ac - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0.$$

Ordonând după puterile lui $\cos 2x$, se obține

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0,$$

ceea ce constituie relația căutată între a , b , c și $\cos 2x$.

În cazul $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ avem

$$a^2 = 16; 2a^2 + 4ac - 2b^2 = 8,$$

$$a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = -4.$$

Se obține următoarea relație în $\cos 2x$:

$$4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1 = 0,$$

iar relația dată inițial, în cazul cînd $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$, este

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

Altă metodă de rezolvare. Se notează cu y_1, y_2 rădăcinile ecuației de gradul al doilea $ay^2 + by + c = 0$. Este evident că $y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$; $y_1 y_2 = \frac{c}{a}$. Trebuie formată ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile $z_1 = 2y_1^2 - 1$ și $z_2 = 2y_2^2 - 1$. Calculăm $-(z_1 + z_2)$ și $z_1 z_2$:

$$-(z_1 + z_2) = -2(y_1 + y_2)^2 + 4y_1 y_2 + 2;$$

$$z_1 z_2 = 4y_1^2 y_2^2 - 2(y_1 + y_2)^2 + 4y_1 y_2 + 1.$$

Se poate lua coeficientul lui z^2 egal cu 1, iar coeficientul lui z și termenul liber vor fi dați de expresiile obținute pentru $-(z_1 + z_2)$ și $z_1 z_2$, înlocuindu-se în prealabil $y_1 + y_2$ cu $-\frac{b}{a}$, iar $y_1 y_2$ cu $\frac{c}{a}$. Înmulțind membrul drept cu a^2 , se obține relația de gradul al doilea care se căuta. Folosind această metodă de rezolvare, este necesar un studiu separat al cazului $a = 0$.

4. Fie ABC triunghiul căutat (fig. 2). Se descrie un cerc de rază $\frac{c}{2}$ avînd centrul în mijlocul O al ipotenuzei $AB = c$. Se știe că acest cerc va fi circumscris triunghiului ABC . Din vîrfurile C se duce înălțimea h_c și se calculează aria triunghiului ABC :

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} c h_c.$$

Prin ipoteză, $AC \cdot CB = CO^2 = \frac{c^2}{4}$,
însă $AC \cdot CB = 2S$. Aceasta înseamnă
că $c \cdot h_c = \frac{c^2}{4}$ și, în consecință, $h_c = \frac{c}{4}$.

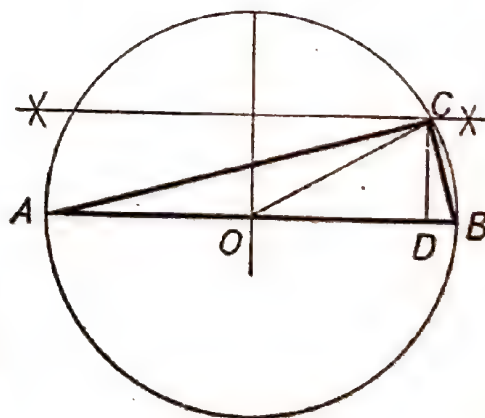


Fig. 2.

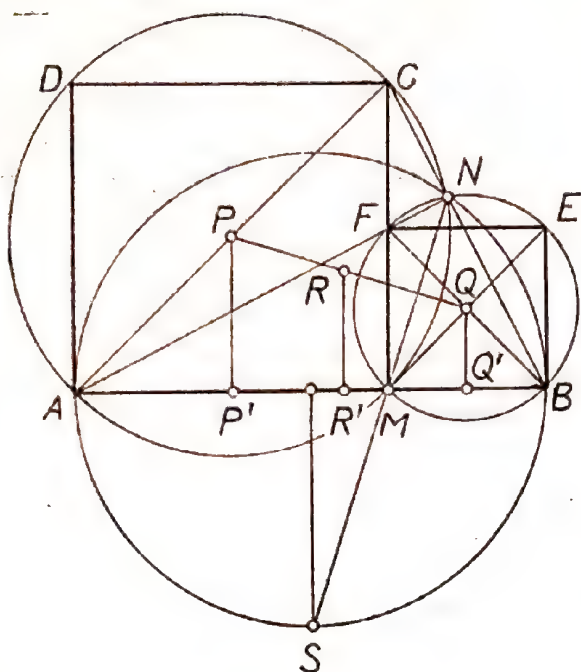


Fig. 3

De aceea vârful O este unul din punctele de intersecție ale cercului de diametru AB cu o dreaptă paralelă cu AB și situată la distanța $\frac{c}{4}$ de aceasta.

5. a) Se demonstrează că dreptele AN și BN sînt perpendiculare. Într-adevăr, $\angle ANM = \angle ACM = 45^\circ$. Cu totul analog, $\angle BNM = \angle BEM = 45^\circ$. În consecință $\angle ANB = 90^\circ$ și dreapta MN este bisectoarea sa (fig. 3).

Se demonstrează că dreapta BC trece prin punctul N . Se unește punctul N cu punctul B și cu punctul C . Unghiul BNA este drept, așa cum s-a demonstrat.

$\angle CNA$ este de asemenea drept, deoarece se sprijină pe diametrul AC . Prin urmare, $CN \perp NA$ și $BN \perp NA$, deci punctele B , N și C se află pe perpendiculara din N pe NA .

Se demonstrează, în continuare, că dreapta AF trece prin punctul N . Se unește punctul F cu punctul N , $\angle FNB = 90^\circ$, fiindcă se sprijină pe diametrul FB . S-a demonstrat însă, că $AN \perp BN$, și, prin urmare, punctele F și A sînt situate pe perpendiculara dusă din N pe dreapta NB .

b) Se demonstrează că toate dreptele MN trec printr-un punct fix S atunci cînd M este luat arbitrar pe segmentul AB . Din mijlocul segmentului AB se descrie un cerc de rază $r = \frac{AB}{2}$. Locul

geometric al punctelor N va fi un semicerc, deoarece s-a arătat la punctul a) că unghiul ANB este drept, iar MN este bisectoarea sa. Prin urmare, toate dreptele MN trec prin punctul S , care împarte în două arcul AB complementar lui ANB .

c) Se demonstrează că locul geometric al mijloacelor R ale segmentelor PQ care unesc centrele pătratelor va fi un segment de dreaptă VW , paralel cu dreapta AB și situat la distanța $h = \frac{AB}{4}$

de aceasta. Ducem din punctele P , Q și R perpendicularele PP' , RR' , QQ' pe AB . Atunci patrulaterul $PP'Q'Q$ este un trapez, iar

RR' este linie mijlocie în acest trapez, de aceea $RR' = \frac{PP' + QQ'}{2}$, însă $PP' = \frac{AM}{2}$ și $QQ' = \frac{MB}{2}$, prin urmare, $RR' = \frac{AM + BM}{4} = \frac{AB}{4}$. Punctul R este situat în acest caz pe dreapta paralelă cu AB și la distanța $RR' = \frac{AB}{4}$ de aceasta. Se examinează pozițiile extreme pe care le ocupă punctul R și anume cazurile când punctul M coincide fie cu punctul A , fie cu punctul B . În primul caz punctul R va fi dat de mijlocul V al segmentului PA , iar în a doua situație de mijlocul W al segmentului PB (P este centrul pătratului construit pe AB).

6. Fie trapezul $ABCD$ cel căutat (fig. 4), iar dreptele $AB \parallel CD \parallel p$. Astfel, trebuie dușe prin punctele A și C două drepte p' și q' respectiv, care să fie paralele cu p , iar pe acestea să se găsească punctele B , respectiv D , care să fie vîrfuri ale trapezului isoscel $ABCD$ în care se poate înscrie un cerc. Dacă în trapez se poate înscrie un cerc, înseamnă că $AB + CD = AD + BC = 2AD$. Atunci $AF' = FE$, unde F' este mijlocul segmentului AB , $FF' \perp q'$, iar E este proiecția lui A pe CD (fig. 5); de aceea $AB = 2AF' = 2EF$ și $CD = 2CE - 2EF$ și, prin urmare, $2AD = 2EC$, adică $ED = EC$, rezultînd că punctele D și D' sînt situate pe cercul de rază EC , avînd centrul în punctul A . Pentru ca problema să poată fi rezolvată, este necesar ca $AD = EC \geq F'F$, adică $\frac{AE}{EC} \leq 1$, deci $\angle ACE \leq 45^\circ$.

Această condiție este și suficientă.

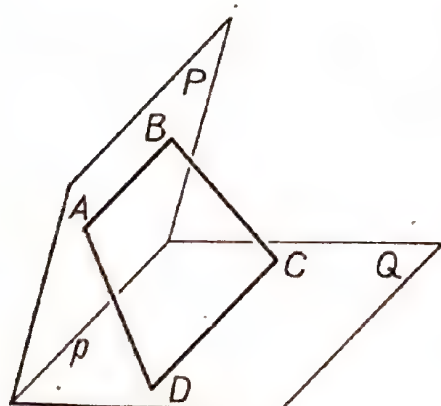


Fig. 4.

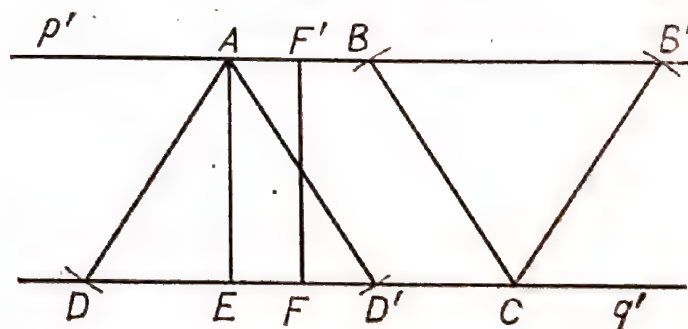


Fig. 5.

De aici rezultă următoarea construcție. Prin punctul A (fig. 5) se duce perpendiculara AE pe dreapta q' , iar din punctul A se descrie un cerc de rază CE , cerc care intersectează dreapta q' în punctele D și D' . Împărțim segmentul CD în două părți egale cu ajutorul lui F și ducem $FF' \perp CD$. Luând simetricul punctului A față de FF' , se va găsi punctul B . Se poate găsi o a doua rezolvare, luând în locul punctului D punctul D' . Problema are două soluții, dacă $\angle ACE < 45^\circ$ și o singură soluție (caz în care trapezul se transformă în pătrat), dacă $\angle ACE = 45^\circ$.

7. Fie N numărul format din trei cifre, care se caută. Atunci $N = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Numărul N se poate pune sub forma

$$N = 99a + 11b + a - b + c. \quad (1)$$

Pentru ca N să fie divizibil cu 11 este necesar și suficient ca $a - b + c$ să fie divizibil * cu 11, adică

$$a - b + c = 11k. \quad (2)$$

Întrucât $-8 \leq a - b + c \leq 18$, rezultă că sau $k = 0$ sau $k = 1$. Prin ipoteză se impune condiția $100a + 10b + c = 11 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

C a z u l I

$$\begin{cases} 99a + 11b + a - b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2), \\ a - b + c = 0. \end{cases}$$

Se aduce sistemul la forma mai simplă

$$\begin{cases} 9a + b = a^2 + b^2 + c^2, \\ b = a + c. \end{cases}$$

De aici rezultă $10a + c = 2a^2 + 2c^2 + 2ac$, ceea ce înseamnă că c este un număr par, adică $c = 2n$. Relația de mai sus se va scrie astfel :

$$a^2 - (5 - 2n)a + 4n^2 - n = 0.$$

Deducem de aici că

$$a = \frac{5 - 2n \pm \sqrt{25 - 16n - 12n^2}}{2}.$$

* Se putea folosi și criteriul de divizibilitate prin 11.

Se vor găsi rădăcini reale pentru a dacă $\Delta = 25 - 16n - 12n^2 \geq 0$. Fiindcă rădăcinile trinomului $-12n^2 - 16n + 25$ sînt

$$n_1 = \frac{-4 + \sqrt{91}}{6} \text{ și } n_2 = \frac{-4 - \sqrt{91}}{6},$$

rezultă că $\Delta \geq 0$ în cazul în care

$$\frac{-4 - \sqrt{91}}{6} \leq n \leq \frac{-4 + \sqrt{91}}{6},$$

însă condițiile ca n să fie întreg și $n \geq 0$, împreună cu faptul că $n_1 < 1$, conduc la concluzia că $0 \leq n < 1$, ceea ce arată că $n = 0$. În acest caz rezultă că $c = 0$, iar $a = b = 5$. Numărul căutat va fi, deci, 550.

Cazul II

$$\begin{cases} a - b + c = 11 \\ 99a + 11b + a - b + c = 11 \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{cases}$$

Scriind sistemul sub forma simplificată

$$\begin{cases} 9a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2, \\ a - b + c = 11, \end{cases}$$

se găsește

$$b = a + c - 11 \text{ și } 10a + c - 10 = a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2$$

sau

$$-32a + 2a^2 + 2c^2 + 2ac - 23c + 131 = 0,$$

ceea ce arată că numărul c este impar. Fie $c = 2n + 1$. Atunci

$$a^2 - (15 - 2n)a + 4n^2 - 19n + 55 = 0,$$

de unde

$$a = \frac{15 - 2n \pm \sqrt{5 + 16n - 12n^2}}{2}.$$

Se vor găsi rădăcini reale pentru a dacă $\Delta = 5 + 16n - 12n^2 \geq 0$. Deoarece $n_1 = \frac{4 + \sqrt{31}}{6}$ și $n_2 = \frac{4 - \sqrt{31}}{6}$ sînt rădăcinile trinomului de gradul al doilea $12n^2 - 16n - 5$, înseamnă că

$\Delta = 5 + 16n - 12n^2 \geq 0$ pentru $n_2 \leq n \leq n_1$, adică $\frac{4 - \sqrt{31}}{6} \leq n \leq \frac{4 + \sqrt{31}}{6}$, însă, în condițiile ipotezei, n este întreg și $n \geq 0$. Ținând seama de faptul că $n_1 < 2$, rezultă că $n = 0$ sau $n = 1$. Valoarea $n = 0$ nu poate fi acceptată, deoarece $a = \frac{15 \pm \sqrt{5}}{2}$ este irațional; pentru $n = 1$ se găsește $a_1 = 8$ și $a_2 = 5$. Dacă $a = 5$, înseamnă că $c = 3$ iar $b = -3$, ceea ce nu se poate; dacă $a = 8$, atunci $c = 3$ iar $b = 0$ și, prin urmare, numărul căutat este 803. Din modul de rezolvare se deduce că nu există alte numere, afară de 550 și de 803, care să satisfacă condițiile problemei.

Răspuns: 550 și 803.

8. Se consideră funcția $f: \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ dată prin

$$f(x) = \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2}.$$

Înmulțind numărătorul și numitorul cu $(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 \neq 0$, se obține

$$f(x) = \frac{4x^2(1 + \sqrt{1 + 2x})^2}{(1 - 1 - 2x)^2} = (1 + \sqrt{1 + 2x})^2.$$

Acum inegalitatea dată ia forma

$$(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 < 2x + 9 \text{ sau } 2\sqrt{1 + 2x} < 7.$$

Deoarece $x \geq -\frac{1}{2}$, prin ridicarea la pătrat a ambilor membri pozitivi ai inegalității, se obține egalitatea echivalentă

$$4 + 8x < 49, \text{ adică } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}, \text{ cu condiția ca } x \neq 0.$$

Observație. Dacă se prelungește, ca de obicei, funcția f și în punctul $x = 0$ punind $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, atunci inegalitatea dată se păstrează și pentru cazul $x = 0$.

9. Fie $DE = \frac{a}{n}$ și $BH = x$. În acest caz (fig. 6)

$$x(a - x) = h^2 \quad (1)$$

și dacă $\angle HAD = \beta$ și $\angle DAE = \alpha$, atunci $\angle EAH = \alpha + \beta$. Se cunoaște că

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (2)$$

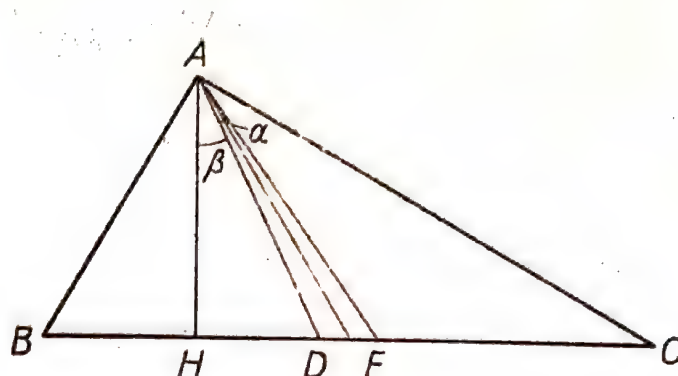


Fig. 6.

Din triunghiul dreptunghic AHE se găsește că $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$

$$= \frac{HE}{AH}. \text{ Dar } HE = HD + DE, \text{ iar } HD = BD - BH, \text{ iar } BD = \frac{n-1}{2n}a.$$

De aici rezultă că $HE = \frac{n+1}{2n}a - x$, iar $HD = \frac{n-1}{2n}a - x$. Din această cauză

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{HE}{AH} = \frac{\frac{n+1}{2n}a - x}{h}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{n-1}{2n}a - x}{h}.$$

Prin înlocuirea acestor expresii în (2) se obține

$$\frac{1}{h} \left(\frac{n+1}{2n}a - x \right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{h} \left(\frac{n-1}{2n}a - x \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{n-1}{2n}a - x \right)},$$

de unde

$$\operatorname{tg} \alpha \left[\frac{\left(\frac{n+1}{2n}a - x \right) \left(\frac{n-1}{2n}a - x \right)}{h} + h \right] =$$

$$= -\frac{n-1}{2n}a + x + \frac{n+1}{2n}a - x;$$

$$\frac{a}{n} = \frac{h^2 + \frac{n^2-1}{4n^2}a^2 - ax + x^2}{h} \operatorname{tg} \alpha,$$

dar, deoarece din relația (1) se găsește $x^2 - ax = -h^2$, se va obține

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4n^2 ah}{n(n^2 - 1)a^2} = \frac{4nh}{a(n^2 - 1)}.$$

10. Analiza construcției. Fie ABC triunghiul căutat (fig. 7). Segmentele h_a, h_b, m_a sînt date. Dacă se duce $HD \perp AC$ din punctul H care este mijlocul lui BC , atunci $HD \parallel BE$. Prin urmare, HD este linie mijlocie în

triunghiul BEC , deci $HD =$

$$= \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} h_b.$$

Din acestea rezultă clar planul construcției. Cu ajutorul lui h_a și m_a se poate construi triunghiul dreptunghic FAH . Se găsește apoi punctul D la intersecția cercului de

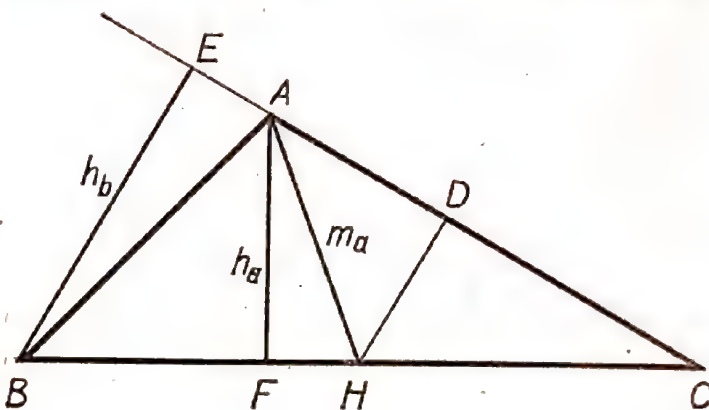


Fig. 7.

diametru $AH = m_a$ cu cercul de rază $\frac{1}{2} h_b$, avînd centrul în punctul H .

Continuarea construcției rezultă din faptul că triunghiul ADH este dreptunghic în D avînd ipotenuza AH , iar $DH = \frac{1}{2} h_b$. Găsin-du-se punctul D , poate fi trasată AC . După aceasta punctul B se construiește ca simetric al punctului C față de H .

Construcție. Se ia punctul F pe o dreaptă oarecare MN (fig. 8). Prin punctul F se duce perpendiculara $FA = h_a$ pe această dreaptă. Din punctul A ca centru se descrie cercul de rază m_a . Dacă $m_a > h_b$, cercul intersectează dreapta MN în două puncte H și H' . În caz contrar problema nu poate fi rezolvată.

Se unește punctul A cu punctul H ; $AH = m_a$. Se construiește cercul de diametru AH și se descrie un cerc cu centrul în punctul H și rază $\frac{1}{2} h_b$. Dacă $\frac{1}{2} h_b < m_a$, atunci acest cerc intersectează cercul

de diametru AH în punctele distincte D și D' . Dacă $\frac{1}{2} h_b \geq m_a$, atunci problema nu admite rezolvări. Considerăm în continuare cazul $\frac{1}{2} h_b < m_a$. Se trasează dreapta AD . Aceasta inter-

sectează pe MN într-un punct C . Pe aceeași dreaptă se construiește punctul B , simetricul punctului C față de punctul H . Triunghiul ABC este cel căutat. Într-adevăr, înălțimea sa este $AF = h_a$;

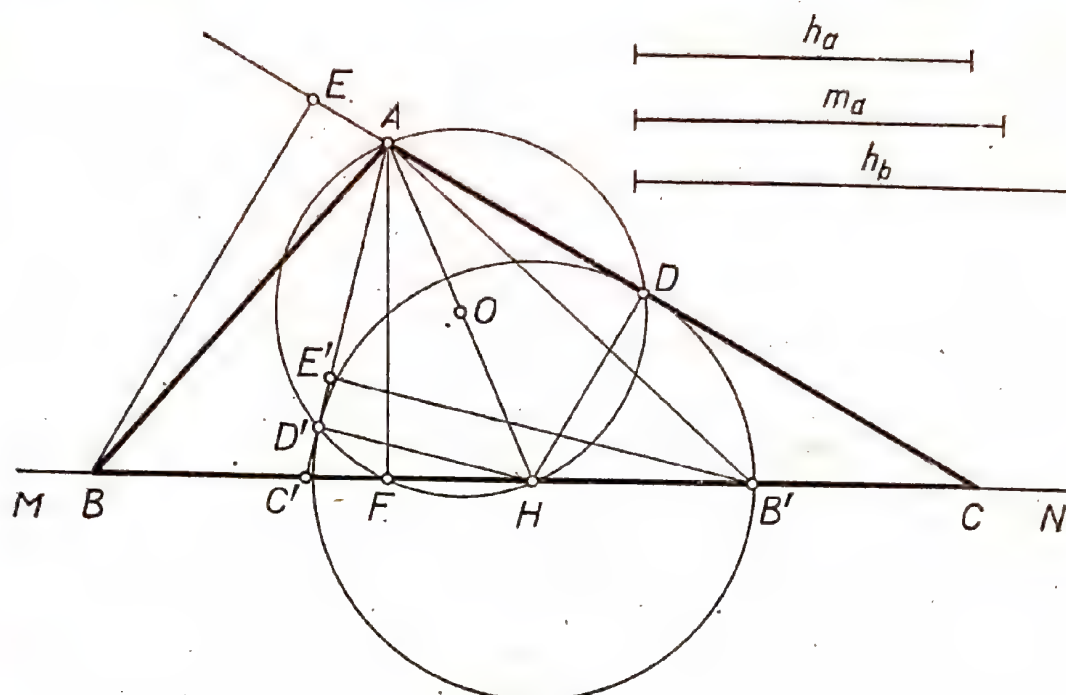


Fig. 8.

$AH = m_a$ este mediană, deoarece H prin construcție este mijlocul bazei BC a triunghiului ABC . Ducem $BE \perp AC$. Atunci BE este înălțimea din B a triunghiului ABC , iar $HD = \frac{1}{2} h_b$ este linie mijlocie în triunghiul BEC , deci $HD = \frac{BE}{2}$. Rezultă că $BE = h_b$.

Se obține o a doua rezolvare, ducând dreapta AC' prin punctele A și D' și construindu-se punctul B' simetric cu punctul C' față de H . Într-adevăr, în triunghiul $C'AB'$ înălțimea este $AF = h_a$, iar mediana este $HA = m_a$. Ducând $B'E' \perp AC'$, se obține că $B'E' \parallel HD'$, deci HD' este linie mijlocie în triunghiul $C'E'B'$, adică $HD' = \frac{B'E'}{2}$.

Fiindcă punctul D' este situat pe cercul de centru H și de rază $\frac{1}{2} h_b$, rezultă că $HD' = \frac{1}{2} h_b$, deci $\frac{1}{2} h_b = \frac{B'E'}{2}$, adică $B'E' = h_b$.

Se mai obțin încă două rezolvări, dacă se ia segmentul AH' ca mediană m_a . Cele două triunghiuri care se obțin, simetrice față

de înălțimea AF , se vor deosebi de cele anterior găsite numai prin poziția lor.

Problema are, astfel, două rezolvări diferite în condițiile în care $m_a > h_a$ și $m_a > \frac{1}{2} h_b$.

11. Se demonstrează punctul b).

b) Dacă punctul X coincide cu punctul A , iar Y cu B' , condiția este satisfăcută de punctul E (fig. 9) care împarte segmentul AB' în raportul $\frac{B'E}{AE} = \frac{2}{1}$. Dacă punctul X coincide cu punctul C , iar punctul Y coincide cu punctul B' , condiția este îndeplinită de punctul F care împarte segmentul CB' în raportul $\frac{BF'}{FC} = \frac{2}{1}$.

Dacă punctul X este mobil pe segmentul AC , iar punctul Y coincide cu punctul B' , segmentul EF va fi locul geometric al punctelor care satisfac relația dată. Într-adevăr, triunghiul $B'EF$ este asemenea cu triunghiul $B'AC$. De aceea segmentul EF este locul geometric al punctelor care satisfac aceeași condiție ca și punctele E și F .

În mod analog se construiește și locul geometric KL în planul $D'AC$. Unindu-se punctul K cu punctul F și punctul L cu punctul E , se obțin două perechi de triunghiuri asemenea: $\triangle CKF \sim \triangle CD'B'$ și $\triangle AEL \sim \triangle AD'B'$. Punctele segmentelor KF și EL aparțin locului geometric căutat, deoarece pentru ambele perechi de triunghiuri asemenea raportul de asemănare este $\frac{1}{3}$.

Astfel, patrulaterul $EFKL$ aparține în întregime locului geometric căutat. Orice punct interior acestui patrulater aparține, de asemenea, locului geometric respectiv. Într-adevăr, dacă se ia pe AC un punct oarecare X , iar pe $D'B'$ un punct oarecare Y , se poate arăta că punctul Z care împarte segmentul XY în raportul $\frac{YZ}{XZ} = \frac{2}{1}$ aparține

patrulaterului $EFKL$. Pentru aceasta se duce planul care conține pe AC și pe Y . Acest plan intersectează planul $D'C'B'$ după dreapta CY și planul $AB'D'$ după dreapta AY . Prin urmare, el va intersecta planul patrulaterului $EFKL$ după dreapta

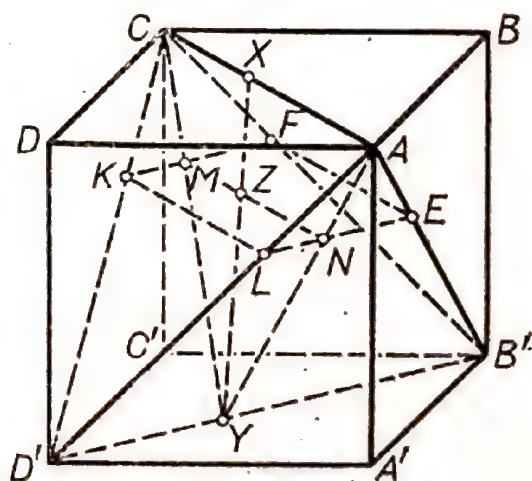


Fig. 9.

căutată MN . Triunghiul YMN este asemenea cu triunghiul YCA . Se arată ușor că raportul de asemănare este $\frac{2}{3}$. Dreapta XY este situată în planul acestor triunghiuri și trece prin punctul Y , deci segmentul XY intersectează dreapta $MN \parallel AC$ într-un punct Z care îl împarte în raportul $\frac{2}{1}$; pe XY se află însă un singur punct care îl împarte în acest raport, ceea ce înseamnă că acest punct este tocmai Z , deci aparține planului patrulaterului $EFKL$. Se demonstrează, în continuare, că orice punct interior Z al patrulaterului $EFKL$ aparține unui segment cu extremitățile situate pe AC , respectiv pe $D'B'$, care este împărțit de acest punct în raportul $\frac{2}{1}$. Se duce un plan prin dreapta AC și punctul Z . Acest plan va intersecta planul patrulaterului $EFKL$ după o dreaptă $MN \parallel EF \parallel KL$. În acest caz, Z fiind un punct interior al patrulaterului, MN este situată între KL și EF și, prin urmare, punctele de intersecție ale acesteia cu LE și FK sînt situate în interiorul acestor segmente; în consecință intersecțiile sale cu planele $CD'B'$ și $AD'B'$ respectiv vor fi drepte situate în interiorul unghiurilor $D'CB'$ și $D'AB'$, iar intersecția cu segmentul $D'B'$ va fi un punct Y interior lui $D'B'$. Din considerarea triunghiurilor YMN și YCA este evident că $\frac{YZ}{XZ} = \frac{2}{1}$.

În încheiere se va arăta că patrulaterul $EFKL$ este dreptunghi și se va găsi mărimea fiecăreia dintre laturile sale. Se arată cu ușurință că $LK = EF$ și că $EL \parallel KF \parallel D'B'$, $LK \parallel EF \parallel AC$, din considerente privind asemănarea de triunghiuri. Din cauză că $AC \perp D'B'$ rezultă că $EFKL$ este dreptunghi; $KF = LE = \frac{1}{3} D'B' = \frac{1}{3} a \sqrt{2}$;

$$EF = LK = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} a\sqrt{2}.$$

Problema care a fost studiată poate fi generalizată pentru orice valoare a raportului $\frac{YZ}{XZ}$, demonstrația dată păstrîndu-și valabilitatea și în acest caz. În condițiile punctului a) raportul $\frac{YZ}{XZ} = 1$.

12. (Fig. 10). a) Analiza construcției. Se presupune problema rezol-

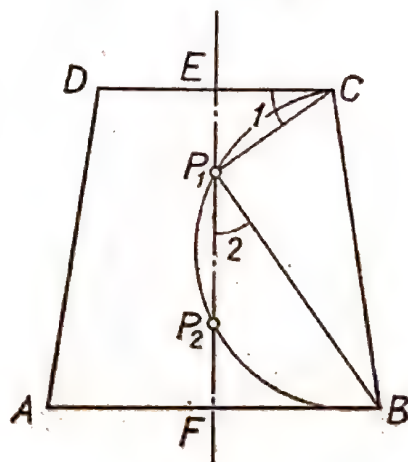


Fig. 10.

vată. În acest caz CB se vede din punctul P sub un unghi drept, ceea ce înseamnă că punctul P este situat pe cercul de diametru CB .

Construcție. Pe diametrul CB se descrie un semicerc; punctele P_1 și P_2 sînt punctele de intersecție ale acestuia cu axa EF . Semicercul construit pe AD ca diametru trece de asemenea prin punctele P_1 și P_2 (din cauză că EF este axă de simetrie a trapezului).

Se observă că P_1 și P_2 sînt situate neapărat în interiorul segmentului EF .

b) $EP_1 = x$, $FP_1 = h - x$, $\angle P_1CE = \angle BP_1F$, deoarece sînt unghiuri cu laturile perpendiculare, $\hat{E} = \hat{F} = \frac{\pi}{2}$, $\triangle EP_1C \sim \triangle FP_1B$,

$$\frac{EP_1}{FB} = \frac{EC}{P_1F}, \quad \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{h-x}; \quad hx - x^2 = \frac{ab}{4}; \quad x^2 - hx + \frac{ab}{4} = 0;$$

$$x = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{h^2 - ab}.$$

c) Dacă $h^2 > ab$, problema are două rezolvări, deoarece în acest caz cercul intersectează axa de simetrie în două puncte diferite.

În cazul $h^2 = ab$ problema are o singură rezolvare. Cercul este tangent la axa de simetrie.

Dacă $h^2 < ab$, problema nu are rezolvare. Cercul nu intersectează axa de simetrie.

Problema se poate rezolva în cazul cînd $h^2 \geq ab$.

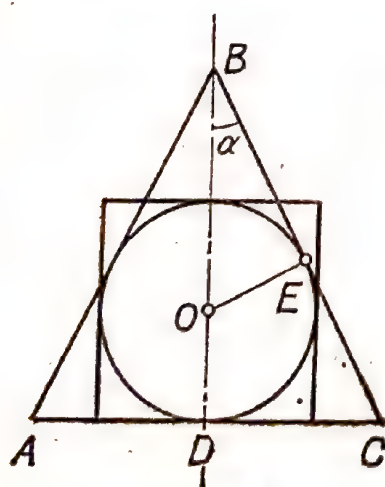


Fig. 11.

13. (Fig. 11). Fie 2α unghiul de la vârful secțiunii axiale a conului iar r raza sferei înscrise în con. Volumul conului va fi

$$V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}, \quad (1)$$

unde $a = DC$ și $h = BD$. Este evident că

$$BD = BO + OD = \frac{r}{\sin \alpha} + r = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha},$$

$$DC = \frac{r(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \alpha.$$

Înlocuind valorile găsite în formula (1), se obține

$$V_1 = \frac{\pi r^3 (1 + \sin \alpha)^3}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\pi r^3 (1 + \sin \alpha)^2}{3 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}. \quad (2)$$

Volumul cilindrului circumscris sferei de rază r este

$$V_2 = 2\pi r^3 \quad (3)$$

(înălțimea cilindrului este $2r$).

Fie $\frac{V_1}{V_2} = k$, atunci $k = \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{6 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}$. Se va exprima acum $\sin \alpha$ prin k . Se găsește ecuația de gradul al doilea

$$(1 + 6k) \sin^2 \alpha + 2(1 - 3k) \sin \alpha + 1 = 0. \quad (4)$$

Această ecuație va avea rădăcini reale dacă și numai dacă $\Delta = (1 - 3k)^2 - (1 + 6k) \geq 0$. Astfel, $k \geq \frac{4}{3}$ și deci egalitatea $V_1 = V_2$ nu poate avea loc.

Pentru $k = \frac{4}{3}$ se obține $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, iar $OB = 3r$.

Unghiul α se construiește ca unghi al unui triunghi dreptunghic în care cateta care se opune acestui unghi este de trei ori mai mică decât ipotenuza.

$$14. \quad \begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & (2) \\ xy = z^2 & (3) \end{cases}$$

Din relațiile (2) și (3) se obține

$$(x + y)^2 = b^2 + z^2,$$

iar din (1) rezultă că $(x + y)^2 = (a - z)^2$, deci $a^2 - 2az = b^2$, adică

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \quad (4)$$

Introducând valoarea lui z din (4) în (1) și în (3), se găsească

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \quad xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}, \quad (5)$$

de unde rezultă că

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a};$$

$$y_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a};$$

$$z_{1,2} = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Discuție. Pentru ca rădăcinile să fie pozitive, este necesar ca $x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a} > 0$, de unde rezultă $a > 0$. Rădăcinile sistemului (5) vor fi reale și distincte, dacă $\Delta = (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)^2 = 10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0$. Rezolvând această inecuație de gradul al doilea, se găsește condiția necesară $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{a}{|b|} < \sqrt{3}$. Valorile lui x și y vor fi neapărat pozitive, deoarece $\Delta < (a^2 + b^2)^2$. Din expresia (4) rezultă că z este pozitiv când $a > 0$, cu condiția $a^2 > b^2$. Astfel, a satisface condiția $|b| < a < |b|\sqrt{3}$.

15. Aria S a triunghiului se găsește din formula lui Heron

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}},$$

în care toți factorii sînt pozitivi. Pentru evaluarea produsului $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ se poate folosi inegalitatea

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \text{ sau } xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27}.$$

Punînd $x = a + b - c$; $y = a + c - b$; $z = b + c - a$, se obține

$$\begin{aligned} 4S &= \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} \leq \\ &\leq \sqrt{(a+b+c) \frac{(a+b+c)^3}{27}} = \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} = \\ &= \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

egalitatea avînd loc în cazul în care $a = b = c$, ceea ce trebuia demonstrat.

16. a) Fie n par, de forma $n = 2m$. Atunci $\cos^{2m} x = 1 + \sin^{2m} x$. Întrucît $\cos^{2m} x \leq 1 \leq 1 + \sin^{2m} x$, rezultă că $\sin x = 0$ și $\cos x = \pm 1$, deci $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Fie n impar, de forma $n = 2m + 1$ ($m \geq 1$). Atunci

$$\cos^{2m+1} x - \sin^{2m+1} x = \cos^{2m+1}(-x) + \sin^{2m+1}(-x) = 1.$$

Pentru $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $|\cos(-x)| < 1$ și $|\sin(-x)| < 1$ și are loc inegalitatea

$$\begin{aligned} |\cos^{2m+1}(-x)| + |\sin^{2m+1}(-x)| &\leq |\cos^{2m+1}(-x)| + |\sin^{2m+1}(-x)| \leq \\ &\leq |\cos^{2m-1}(-x)| \cos^2(-x) + |\sin^{2m-1}(-x)| \sin^2(-x) < \\ &< \cos^2(-x) + \sin^2(-x) = 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, soluțiile pot fi numai de forma $x = k\frac{\pi}{2}$, impunîndu-se condiția ca unul din termeni să fie egal cu 0, iar celălalt cu -1 . De aici rezultă o primă mulțime de soluții sub forma $x = 2k\pi$, iar a doua mulțime de soluții va fi de forma $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Fie $n = 1$. În acest caz ecuația se scrie $\cos x - \sin x = 1$. Se ridică ambii membri la pătrat și se obține $\cos^2 x - 2 \cos x \sin x + \sin^2 x = 1$, adică $2 \cos x \sin x = 0$. Soluțiile ecuației obținute sînt $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Numai unele dintre acestea vor fi soluții și pentru ecuația inițială, celelalte fiind soluții ale ecuației $\cos x - \sin x = -1$. Este clar că soluțiile ecuației care aparțin intervalului $[0, 2\pi)$ vor fi $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Se obțin deci două mulțimi de soluții :

$$x = 2k\pi; \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

17. Se duc medianele P_1M_1 , P_2M_2 și P_3M_3 în triunghiul dat (fig. 12). Acestea îl descompun în șase triunghiuri de forma SP_iM_i , punctul S fiind centrul de greutate al triunghiului. Cînd punctul P coincide cu punctul S , atunci

$$\frac{P_1P}{PM_1} = \frac{P_2P}{PM_2} = \frac{P_3P}{PM_3} = \frac{2}{3}.$$

Fie punctul P diferit de punctul S . În acest caz punctul P este situat în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile în care a fost descompus triunghiul dat. Se va presupune, fără a restringe generalitatea, că acesta este $\triangle P_1SM_2$. Laturile P_2P_1 și P_1P_3 vor fi împărțite în raportul $\frac{2}{1}$ cu ajutorul punctelor S_{12} și respectiv S_{31} .

Este evident că $SS_{12} \parallel P_1P_3$ și $SS_{31} \parallel P_2P_1$, iar triunghiul P_1SM_2 este situat în interiorul trapezului $P_1S_{12}SM_2$. Dreapta P_2Q_2 intersectează pe SS_{12} în punctul A_2 , situat între punctele P_2 și P . Din aceasta rezultă că $\frac{P_2P}{PQ_2} \geq \frac{P_2A_2}{A_2Q_2} = \frac{2}{1}$. În mod analog, P_1SM_2 este situat în interiorul triunghiului P_1SS_{31} . Dreapta P_1P intersectează dreapta SS_{31} în punctul A_1 , care în acest caz nu se găsește în interiorul lui P_1P , ci în interiorul segmentului PQ_1 . Rezultă

$$\frac{P_1P}{PQ_1} \leq \frac{P_1A_1}{A_1Q_1} = \frac{2}{1},$$

ceea ce se cerea demonstrat.

18. Fie $\triangle ABC$ care se cere. Atunci $\angle AMC = \pi - \omega > \frac{\pi}{2}$, iar L este mijlocul lui AC (fig. 13). Segmentul $ML = \frac{c}{2}$, deoarece este linie mijlocie în triunghiul ABC . De aici rezultă următoarea construcție.

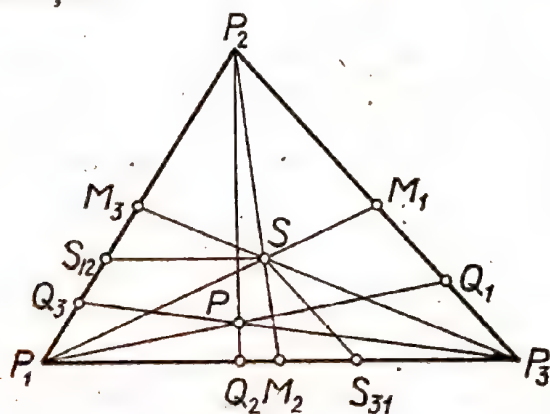


Fig. 12.

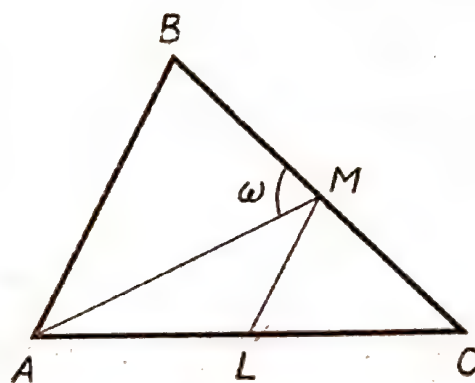


Fig. 13.

Pe $AC = b$ se construiește un segment de cerc capabil de $\angle AMC = \pi - \omega$ (fig. 14) și se descrie apoi un cerc cu centrul în mijlocul L al segmentului AC și de rază $\frac{c}{2}$. Punctele căutate M

iar, dacă înălțimea segmentului $h = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} < \frac{c}{2}$, mijlocul H al segmentului de cerc este situat în interiorul cercului de centru L . De aceea cercul de centru L se intersectează cu segmentul de cerc între punctele A și H . Punctul simetric cu M față de linia centrelor OH se va găsi pe arcul CH . În cazul limită, când $h = \frac{c}{2}$, cercul și segmentul de cerc sînt tangente în punctul $M \equiv H$, $\triangle AMC$ este isoscel, $BA \parallel ML \perp BC$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în vîrfurile B . Cazul limită față de cealaltă condiție $\frac{b}{2} = \frac{c}{2}$ dă un triunghi care degenerază într-un segment, deoarece punctul M coincide cu punctul A , iar vîrfurile B este situat pe prelungirea lui AC .

19. Se alege un sistem de coordonate astfel : originea O este un punct oarecare al planului ε (fig. 16), axa Ox este o dreaptă oarecare din planul ε , axa Oy este perpendiculara pe Ox și este situată în planul ε , iar axa Oz este perpendiculară în O pe planul xOy . Punctele A, B, C vor avea coordonatele $A(x_1, y_1, 2a), B(x_2, y_2, 2b), C(x_3, y_3, 2c)$, printre numerele a, b, c găsindu-se cel puțin două care să fie diferite între ele. Centrul de greutate S al triunghiului ABC are coordonatele

$$S \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{2(a + b + c)}{3} \right).$$

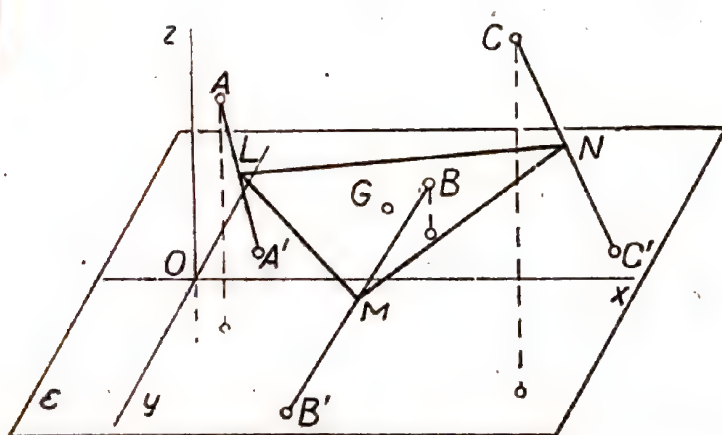


Fig. 16.

Punctele A', B', C' vor avea coordonatele $A'(x'_1, y'_1, 0); B'(x'_2, y'_2, 0), C'(x'_3, y'_3, 0)$ iar mijloacele segmentelor AA', BB', CC' vor fi notate cu L, M și N respectiv :

$$L \left(\frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2}, a \right),$$

$$M \left(\frac{x_2 + x'_2}{2}, \frac{y_2 + y'_2}{2}, b \right),$$

$$N \left(\frac{x_3 + x'_3}{2}, \frac{y_3 + y'_3}{2}, c \right).$$

Fie G centrul de greutate al triunghiului LMN ; coordonatele sale vor fi

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x'_1 + x'_2 + x'_3}{2 \cdot 3} ; \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3}{2 \cdot 3} ;$$

$$\frac{a + b + c}{3}.$$

Punctele locului geometric vor fi situate, în consecință, în planul de ecuație $z = \frac{a + b + c}{3}$ (1) paralel cu planul ε și împărțind în două distanța de la centrul de greutate S al triunghiului ABC la planul ε . Se arată că orice punct al acestui plan este punct al locului geometric. Se ia pentru aceasta un punct arbitrar $G(\bar{x}, \bar{y}, \frac{a + b + c}{3})$, situat în planul (1) și se arată că în planul ε există punctele $A'(x'_1, y'_1)$; $B'(x'_2, y'_2)$ și $C'(x'_3, y'_3)$. Coordonatele punctelor A' , B' și C' se determină din relațiile:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x'_1 + x'_2 + x'_3}{6}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3}{6},$$

unde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) sînt date. Luîndu-se arbitrar x'_2 și x'_3 , se determină x'_1 din prima relație, iar luîndu-se arbitrar y'_2 și y'_3 , se determină y'_1 din a doua relație.

20. Metoda I. Fie m numărul care satisface condițiile a) și b):

$$m = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 6};$$

$$k = 4m = \overline{6 a_1 a_2 \dots a_{n-1}}.$$

Fiindcă ultima cifră a lui m este 6, ultima cifră a numărului $k = 4m$ trebuie să fie 4, adică $a_{n-1} = 4$. Înlocuind valoarea lui a_{n-1} găsită în exprimarea lui m , înmulțind pe m cu 4, se găsește $a_{n-2} = 8$. Înlocuind în expresia lui m valoarea lui a_{n-2} , se obține $a_{n-3} = 3$ ș.a.m.d. Ultima operație de acest fel se face atunci cînd se obține cifra 6. Numărul obținut 153846 satisface condițiile a) și b), nici un alt număr mai mic neputînd să le satisfacă.

Metoda II. Fie $m = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} 6}$. Acest număr poate fi scris sub forma $m = 10x + 6$, unde $x = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ este un număr întreg care are $n - 1 = y$ cifre. De aceea

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^y + x,$$

adică

$$39x = 6(10^y - 4)$$

sau

$$13x = 2(10^y - 4),$$

ceea ce înseamnă că $10^y - 4$ se divide la 13.

Considerăm numerele 6, 96, 996, 9996, ... și vom căuta printre acestea pe cel mai mic care se împarte fără rest la 13. Acesta va fi numărul $99\,996 = 13 \cdot 7692$. De aceea $y = 5$. Din ecuație găsim $x = 15\,384$. Numărul căutat va fi $m = 153\,846$. Într-adevăr, se găsește

$$4 \cdot 153\,846 = 615\,384.$$

21. Radicalii din membrul întâi al ecuației există numai dacă

$$3 - x \geq 0 \text{ și } x + 1 \geq 0, \text{ adică } -1 \leq x \leq 3.$$

Se consideră inecuația

$$(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1})^2 > \frac{1}{4}, \quad (1)$$

obținută ca o consecință a inecuației inițiale, însă care nu îi este echivalentă, deoarece este verificată și de valorile lui x care sînt soluții ale inecuației

$$-(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}) > \frac{1}{2}.$$

Astfel, soluții ale inecuației inițiale sînt acele și numai acele soluții ale inecuației (1) pentru care diferența $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ este pozitivă.

Soluțiile inecuației $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} \geq 0$ vor fi, cum se vede ușor, numerele $x \leq 1$.

Întrucît inegalitățile $-1 \leq x \leq 3$ trebuie să fie, de asemenea, satisfăcute, trebuie să fie considerate acele valori ale lui x pentru care $-1 \leq x \leq 1$. Pentru astfel de valori ale lui x , în locul inecuației inițiale poate fi rezolvată inecuația (1). După efectuarea calculelor, se obține

$$\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+1} < \frac{15}{8}.$$

Prin ridicare la pătrat și aducându-se la o formă mai simplă, se găsește

$$64x^2 - 128x + 33 > 0. \quad (2)$$

Această inecuație este echivalentă cu inecuația inițială dacă $-1 \leq x \leq 1$, deoarece pentru aceste valori ale lui x ambele expresii care se găsesc sub radicali sînt nenegative. Se obțin

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \text{ și } x_2 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$$

ca rădăcini ale ecuației $64x^2 - 128x + 33 = 0$. Atunci inegalitatea (2) are loc pentru $x < x_1$ și $x > x_2$. Asociind aceste inegalități condițiilor $-1 \leq x \leq 1$, deducem în cele din urmă că

$$-1 \leq x \leq 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

În continuare se dă o a doua metodă de rezolvare a acestei probleme. Se consideră $-1 \leq x \leq 3$. Cu aceleași transformări, ca și în cazul primei rezolvări, se obțin

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \text{ și } x_2 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Se observă că $\sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = \frac{1}{2}$. Fără a mai pune în continuare problema echivalenței transformărilor, vom considera inecuația inițială. Este evident că pentru $x > x_1$

$$\sqrt{3-x} < \sqrt{3-x_1} \text{ iar } \sqrt{x+1} > \sqrt{x_1+1}$$

și de aceea

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} < \sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = \frac{1}{2}.$$

În mod analog, pentru $x < x_1$ se obține $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$.

Soluțiile vor fi

$$-1 \leq x \leq 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Cea mai răspândită greșeală în rezolvarea problemei 21 a fost lipsă demonstrației echivalenței dintre inegalitățile obținute și cea inițială,

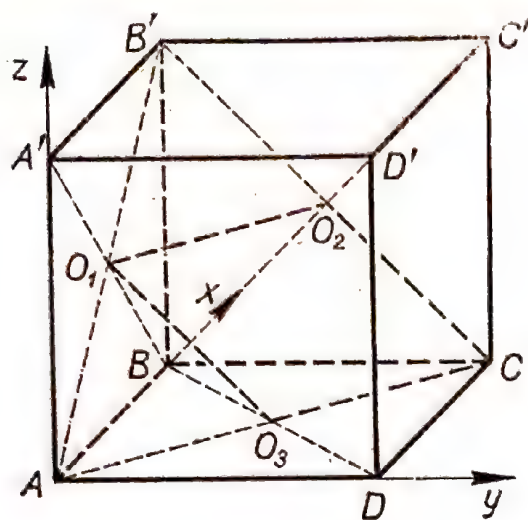


Fig. 17.

22. Se notează centrul feței $ABB'A'$ prin O_1 (fig. 17), centrul feței $BB'C'C$ prin O_2 , centrul feței $ABCD$ prin O_3 . Se demonstrează că locul geometric al mijloacelor Z ale segmentelor XY este linia frântă $O_1O_2CO_3O_1$. Fie A originea unui sistem de coordonate, iar AB , AD și AA' vor materializa axele de coordonate Ax , Ay , Az respectiv, $AB = AD = AA' = 1$. Se împarte timpul în care punctul X parcurge drumul $ABCD$ în patru părți egale, luându-se cantitatea de timp obținută astfel drept unitate de măsură.

Se cunoaște că dacă un punct K se mișcă uniform și rectiliniu, atunci coordonatele sale depind liniar de timp și, reciproc, dacă coordonatele punctului K depind liniar de timp, atunci punctul K se mișcă uniform și rectiliniu. De asemenea este cunoscut faptul că dacă T este mijlocul segmentului OP [$O(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$], atunci $T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Se va alcătui, folosind afirmațiile de mai sus, următorul tabel al dependenței coordonatelor punctelor X , Y , Z de timpul t .

		$0 \leq t \leq 1$	$1 \leq t \leq 2$	$2 \leq t \leq 3$	$3 \leq t \leq 4$
X	x	t	1	$3 - t$	0
	y	0	$t - 1$	1	$4 - t$
	z	0	0	0	0
Y	x	1	1	1	1
	y	t	1	$3 - t$	0
	z	1	$2 - t$	0	$t - 3$
Z	x	$\frac{1 + t}{2}$	1	$\frac{4 - t}{2}$	$\frac{1}{2}$
	y	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{4 - t}{2}$	$\frac{4 - t}{2}$
	z	$\frac{1}{2}$	$\frac{2 - t}{2}$	0	$\frac{t - 3}{2}$

Pentru $t = 0, 1, 2, 3, 4$ se observă ușor că Z se află în O_1, O_2, C, O_3 și din nou O_1 , iar pe segmentele ce le unesc pe acestea coordonatele lui Z variază liniar, deci Z descrie în spațiu segmentele $O_1O_2, O_2C, CO_3, O_3O_1$ și deci punctul Z se mișcă de-a lungul rombului $O_1O_2CO_3O_1$.

Folosind alte metode de rezolvare, este necesar să se demonstreze și afirmația reciprocă și anume că dacă punctul M este situat pe linia poligonală respectivă, atunci M este mijlocul segmentului XY . Lipsa demonstrației acestei propoziții a fost greșeala caracteristică în rezolvarea acestei probleme.

23. Aplicând formulele

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x, \quad 2 \cos^2 2x = 1 + \cos 4x,$$

se obține

$$\cos 2x + \cos 4x + 2 \cos^2 3x = 0.$$

Folosind formula de transformare în produs a expresiei $\cos \alpha + \cos \beta$, se găsește

$$2 \cos 3x \cos x + 2 \cos^2 3x = 0$$

sau

$$2 \cos 3x (\cos x + \cos 3x) = 0,$$

$$2 \cos 3x 2 \cos 2x \cos x = 0. \quad (1)$$

Soluțiile ecuației (1) sînt:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad 2x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad 3x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

sau

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se observă că prima mulțime de soluții este inclusă în cea de-a treia.

24. Într-un patrulater convex avînd vîrfurile notate succesiv A, B, C, D (fig. 18), se poate înscrie, după cum se știe, un cerc, dacă și numai dacă

$$AD + BC = AB + CD.$$

Presupunînd, fără a restrînge generalitatea, că $AB \geq BC$, se obține

$$AB - BC = AD - CD \geq 0.$$

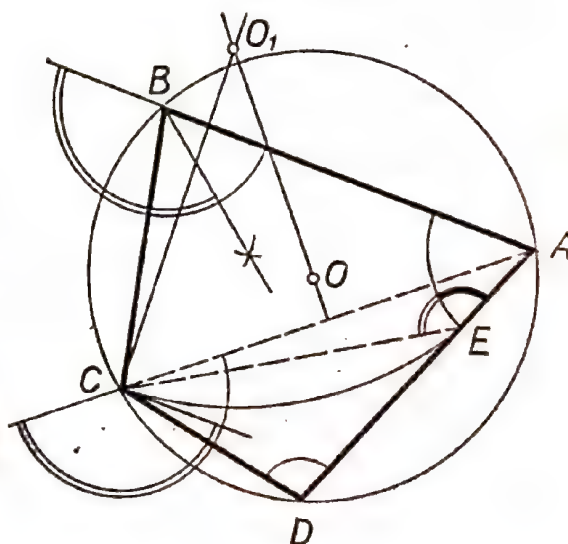


Fig. 18.

În acest caz problema se reduce la construirea triunghiului ACD , cunoscându-se baza AC , $\angle ADC = \pi - \angle ABC$ și diferența $AD - CD$. Se consideră problema rezolvată, triunghiul ADC fiind construit. Se așază peste segmentul AD , începînd din D , segmentul $DE = CD$. Triunghiul CDE va fi, astfel, isoscel.

$$\angle CED = \frac{\pi - \angle ADC}{2} = \frac{\angle ABC}{2},$$

$$\angle AEC = \pi - \frac{\angle ABC}{2}.$$

De aici rezultă următoarea construcție. Se construiește un segment de cerc care se sprijină pe segmentul AC , nu este situat față de acesta de o aceeași parte cu punctul B și este capabil de unghiul AEC a cărui mărime este $\pi - \frac{\angle ABC}{2}$. Din punctul A

ca centru se descrie un cerc de rază egală cu $AB - BC$. Atunci punctul căutat E se găsește la intersecția segmentului de cerc cu cercul (această intersecție este totdeauna nevidă, deoarece $AE < AC$ și deci $AB - BC < AC$). Se prelungește AE pînă intersectează cercul dat în punctul căutat D . Problema are totdeauna o rezolvare unică pe arcul AC care nu conține pe B . Dacă $AB = BC$, se obține punctul D ca intersecție a bisectoarei unghiului ABC cu cercul.

Unii dintre concurenți nu au arătat, rezolvînd această problemă, cum se ia segmentul necesar de cerc. Folosind rezolvarea algebrică a problemei, alți concurenți nu au demonstrat că aceasta este posibilă.

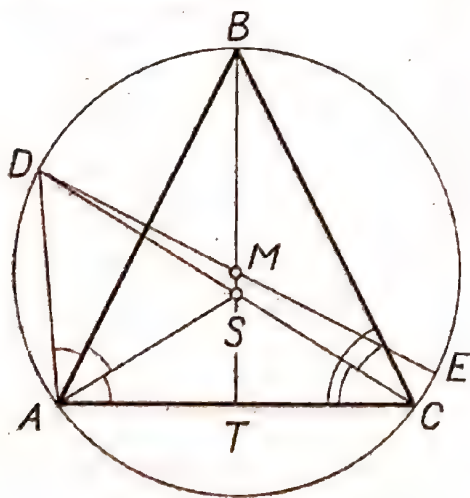


Fig. 19.

25. Fie $AB = BC$. Se notează cu M centrul cercului circumscris, cu S centrul cercului înscris și fie D al doilea punct de intersecție al dreptei CS cu cercul circumscris. Se demonstrează, mai întîi, că $\triangle ADS$ este isoscel (fig. 19). Este evident că $\angle BCS = \angle SCA = \angle SAC = \angle SAB$, dar fiindcă $\angle DAB = \angle SCB$, aceste cinci unghiuri vor fi egale între ele. Mai mult, $\angle DSA = \angle SAC + \angle SCA$. De aceea $\angle DAS = \angle DSA$ și $AD = DS$. Fie E al doilea punct de intersecție al dreptei DM cu cercul circumscris, iar

T piciorul perpendicularei duse din punctul S pe dreapta AC . În triunghiurile CST și ADE avem $\angle ATS = 90^\circ$, $\angle DAE = 90^\circ$, $\angle SCA = \angle DEA$. De aceea $\triangle CST \sim \triangle EDA$ și $\frac{CS}{ST} = \frac{DE}{AD}$ iar $ST = \rho$, $ED = 2r$, $AD = SD$, cum s-a dedus anterior. Prin urmare, $CS \cdot DS = 2r\rho$.

Prin punctele M și S se duce diametrul XY al cercului circumscris. Fără a restrânge generalitatea, vom considera că punctul X este capătul diametrului XY aflat mai aproape de punctul S . Atunci $XS = r - d$ iar $YS = r + d$, prin $d = SM$ înțelegându-se distanța dintre centre.

Folosindu-se puterea punctului S față de cercul circumscris, rezultă că $SC \cdot SD = SX \cdot SY$, și, prin urmare, $2r\rho = (r - d)(r + d)$ și $d^2 = r(r - 2\rho)$, adică $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$.

Se poate arăta că, printr-o modificare neesențială a problemei date, se poate deduce formula $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$ (cunoscută sub denumirea de formula lui Euler) pentru un triunghi oarecare.

Toți concurenții care au rezolvat această problemă au calculat direct lungimea segmentului SM folosindu-se de faptul că acesta este situat pe axa de simetrie BT a triunghiului isoscel ABC . Greșeala lor caracteristică a fost examinarea figurii concrete în care ordinea punctelor era $BMST$, în timp ce pentru $\hat{B} > 60^\circ$ ordinea se schimbă în $BSMT$ și apoi în $BSTM$. Rezolvarea care a fost expusă aici este aplicabilă în toate cazurile.

26. Fie sfera Ω care este tangentă la toate dreptele pe care se găsesc muchiile tetraedrului $SABC$. Atunci Ω intersectează în consecință fiecare față a tetraedrului după cercul înscris sau exînscris acesteia. Cercurile care sînt situate pe fețele vecine unei muchii date au în comun punctul în care sfera este tangentă la dreapta pe care se găsește respectiva muchie. Cu alte cuvinte, punctul de tangentă cu muchia sau cu prelungirea sa este același pentru două cercuri situate în fețe care au comună acea muchie.

Sînt posibile două cazuri:

1. Punctele de tangentă ale sferei sînt situate în interiorul fiecărei muchii. În acest caz toate cercurile sînt tangente la însăși laturile triunghiurilor care constituie fețele tetraedrului, adică sînt cercuri înscrise în aceste triunghiuri.

Sfera tangentă Ω (fig. 20) trebuie să treacă prin punctele P, Q, R de tangentă ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, AB respectiv, și de asemenea prin punctul K de tangentă cu latura SA al cercului înscris în triunghiul SAB . Este evident că punctele P, Q, R nu sînt situate pe aceeași dreaptă, iar punctul K

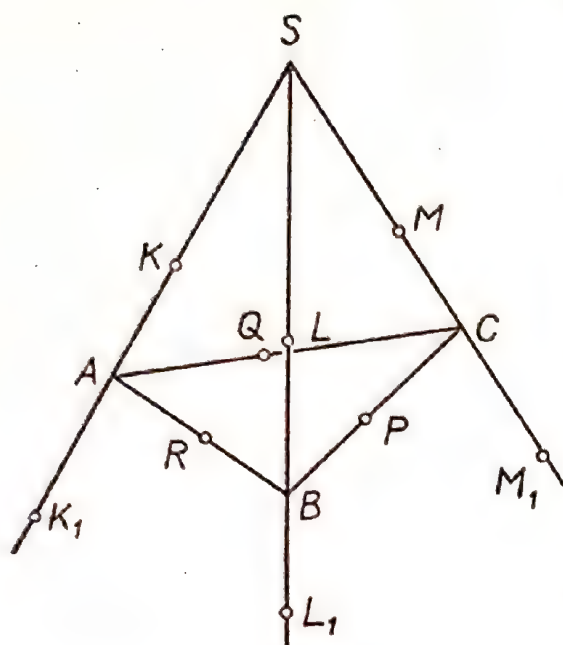


Fig. 20

nu este situat în planul PQR . Prin aceste patru puncte K, P, Q, R nesituate în același plan trece o sferă și numai una singură. Astfel, există cel mult o sferă de acest tip.

2. Cel puțin un punct de tangență al sferei este situat pe prelungirea muchiei. Fără a restringe generalitatea, vom considera că punctul K_1 de tangență al sferei cu SA este situat dincolo de punctul A (adică A este situat între S și K_1). Atunci cercul O_1 tangent la dreptele SA, SB și AB este exînscriș triunghiului SAB , nefiind situat de aceeași parte cu vârful S față de AB . Din această cauză cercul O_1 este tangent la însăși muchia AB în punctul R și la prelungirea mu-

chiei SB dincolo de punctul B în punctul L_1 . Din aceleași considerații cercul O_3 aflat pe fața SCA , deoarece este tangent la dreapta SA în punctul K_1 , este tangent la însăși muchia CA în punctul Q (nefiind situat față de CA de aceeași parte cu S) și la prelungirea muchiei SC dincolo de C în punctul M_1 . În sfârșit, cercul O_2 aflat pe fața SBC este tangent la dreptele SB și SC în punctele L_1 și M_1 și la însăși muchia BC în punctul P . Astfel, această sferă de al doilea tip este tangență la cele trei muchii care sînt laturi pentru fața ABC și la prelungirea muchiilor care ies din vârful S opus feței ABC ; punctele de tangență sînt situate dincolo de A, B, C , pe prelungirile respective.

Repetînd raționamentele din primul caz, se demonstrează că nu există mai mult de o sferă de al doilea tip, care este tangență la muchiile feței date ABC și la prelungirile muchiilor care ies din vârful S opus feței ABC . De aceea numărul total al sferelor de al doilea tip nu este mai mare decît patru.

Se consideră că există toate cele cinci sfere. Se notează astfel muchiile date ale tetraedrului $SABC$:

$$SA = a, SB = b, SC = c, BC = a', AC = b', AB = c'.$$

Fie K, L, M, P, Q, R punctele de tangență ale sferei de primul tip. Atunci $SK = SL = SM, AK = AQ = AR, BL = BP =$

$= BR, CM = CP = CQ$, și fiindcă $AK + KS = AS, BP + PC = BC$ etc., atunci au loc egalitățile

$$a + a' = b + b' = c + c'. \quad (1)$$

Se consideră sfera de al doilea tip care este corespunzătoare feței ABC . Folosind aceleași notații, se găsesc relațiile:

$$SK_1 - AK_1 = SA, BP + PC = BC, SL_1 - BL_1 = SB,$$

$$AQ + QC = AC, SM_1 - CM_1 = SC, AR + RB = AB,$$

de unde

$$a - a' = b - b' = c - c'. \quad (2)$$

Comparând relațiile (1) cu relațiile (2), se obțin

$$a = b = c, \quad a' = b' = c'.$$

Dacă se consideră și sfera de al doilea tip care corespunde feței SAB , se găsește că $c' = a = b$.

S-a demonstrat că tetraedrul este regulat. Rămîne să se arate că pentru un tetraedru regulat există cinci astfel de sfere.

Se notează cu O centrul tetraedrului regulat $SABC$. Sfera Ω cu centrul în punctul O , care trece prin mijlocul unei muchii a tetraedrului, va trece și prin mijloacele celorlalte cinci muchii și va fi tangentă la acestea. Printr-o omotetie de centru S și raport $k = 3$ această sferă se transformă într-o altă sferă, care, se constată ușor, este tangentă la toate dreptele pe care se află muchiile tetraedrului și este o sferă de al doilea tip.

În acest mod se poate construi cîte o sferă de al doilea tip pentru fiecare vîrf al tetraedrului.

Mulți dintre concurenți au demonstrat numai a doua parte a problemei. În demonstrarea primei părți au plecat de la faptul că sferele erau considerate deja în poziția necesară.

27. Ecuația dată este echivalentă cu următorul sistem:

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1})^2 = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Este evident că din ecuația dată rezultă sistemul (1) ca și faptul că din sistemul (1) rezultă

$$|\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1}| = |x|.$$

Deoarece membrul întâi este nenegativ, se poate omite semnul modul, însă a doua relație din sistemul (1) arată că și x este nenegativ, de aceea se poate omite semnul modul și în membrul drept. Se ajunge astfel la ecuația inițială.

Efectuând transformările care se impun, se găsește sistemul

$$\begin{cases} 4\sqrt{x^2 - p} \cdot \sqrt{x^2 - 1} = p + 4 - 4x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Prin raționamente analoage celor precedente, se poate arăta ușor că ultimul sistem este echivalent cu

$$\begin{cases} (4\sqrt{x^2 - p} \cdot \sqrt{x^2 - 1})^2 = (p + 4 - 4x^2)^2, \\ x \geq 0, \\ p + 4 - 4x^2 \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

iar acesta la rîndul său cu sistemul

$$\begin{cases} 16(x^2 - p)(x^2 - 1) = (p + 4 - 4x^2)^2, \\ x \geq 0, \\ p + 4 - 4x^2 \geq 0, \\ x^2 - p \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 8(2 - p)x^2 = (4 - p)^2, \\ x \geq 0 \\ x^2 \leq \frac{p + 4}{4}, \\ x^2 \geq p, \\ x^2 \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Dacă se consideră $p = 2$, sistemul (3) nu are soluții, deoarece în acest caz s-ar deduce din prima ecuație că $0 = 4$, ceea ce este absurd. Sistemul nu are soluții nici pentru $p > 2$, deoarece în această situație membrul stîng al primei egalități nu ar fi pozitiv, iar membrul drept ar fi pozitiv, cu excepția cazului cînd $p = 4$ pentru care membrul drept devine nul; nici în acest caz sistemul nu are soluții, deoarece din prima ecuație rezultă $x = 0$ și ultima inegalitate ar fi $0 \geq 1$, ceea ce, din nou, este absurd.

Astfel, dacă sistemul are soluții, acestea pot exista numai pentru $p < 2$. În acest caz

$$x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)}.$$

În continuare se verifică dacă sint satisfăcute ultimele trei inegalități ale sistemului în condițiile în care $p < 2$. Prima dintre acestea se reduce la

$$\frac{p(3p - 4)}{p - 2} \geq 0.$$

Înmulțind cu numitorul, care este negativ, se găsește $p(3p - 4) \leq 0$, adică $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$. Dacă nu este satisfăcută condiția aceasta, sistemul nu are soluții. A doua inegalitate dă $\frac{(3p - 4)^2}{8(p - 2)} \leq 0$ și este totdeauna îndeplinită (în condițiile deja stabilite, bineînțeles). Același lucru se poate spune și despre ultima inegalitate care se reduce la $\frac{p^2}{8(p - 2)} \leq 0$.

Astfel, pentru $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$ sistemul (3) este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)}, \\ x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Din cauză că am efectuat numai transformări care păstrează echivalența, sistemul (4) este echivalent cu ecuația inițială. Se găsește din acesta că $x = \pm \frac{4 - p}{2\sqrt{2(2 - p)}}$ și fiindcă $x \geq 0$, iar p este totdeauna mai mic decât 2,

$$x = \frac{4 - p}{2\sqrt{2(2 - p)}}. \quad (5)$$

Răspuns. Dacă $p < 0$ sau $p > \frac{4}{3}$, ecuația dată nu are rădăcini. Dacă $0 \leq p \leq \frac{4}{3}$, atunci ecuația are o soluție unică, dată de formula (5).

28. Dacă cea de-a doua latură a unghiului drept trece prin punctul B (sau C), atunci este evident că locul geometric al vârfului său este sfera O_1 (fig. 21) de diametru AB (respectiv sfera O_2 de diametru AC). Se va demonstra că locul geometric căutat va fi mulțimea punctelor care sint situate în interiorul sau pe suprafața a cel puțin

uneia dintre aceste sfere, însă care nu sînt puncte interioare ambelor sfere. Această mulțime de puncte se poate scrie $(\bar{k}_1 \cup \bar{k}_2) \setminus (k_1 \cap k_2)$, prin \bar{k}_i înțelegîndu-se mulțimea punctelor situate în interiorul sau

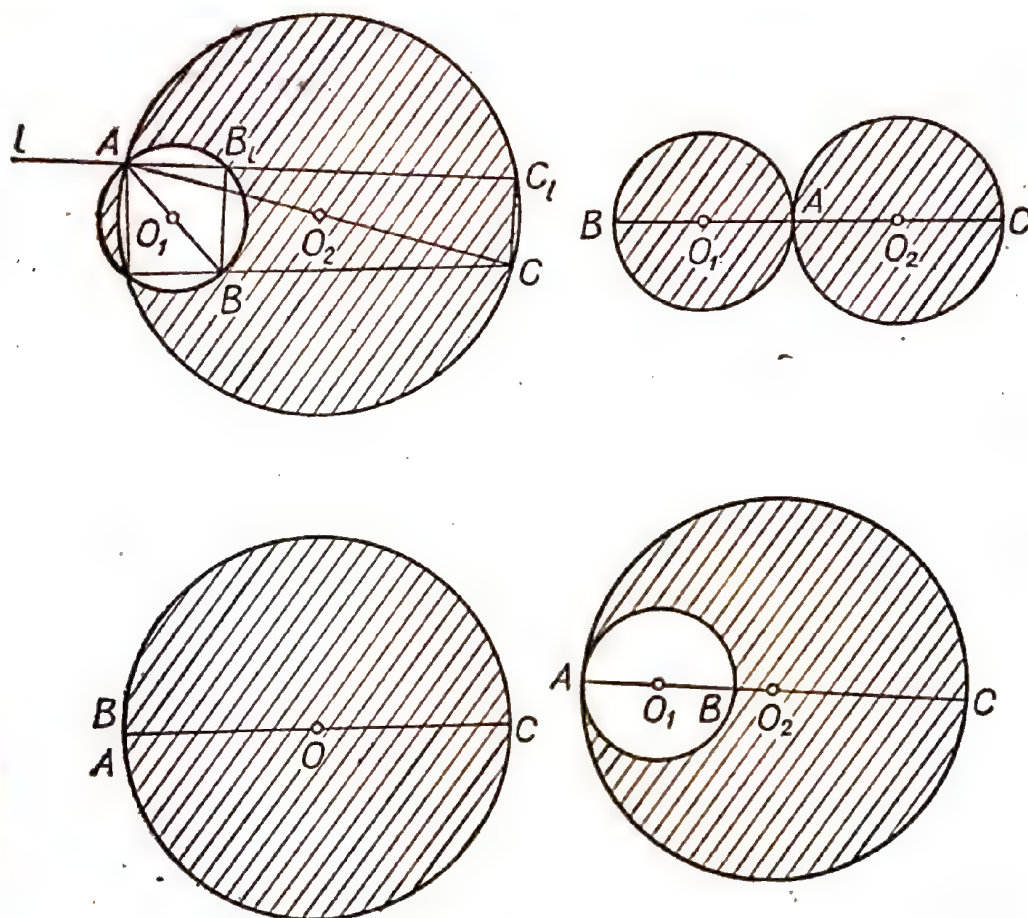


Fig. 21

pe sfera O_1 , iar prin k_i mulțimea punctelor situate numai în interiorul sferei O_i .

Pentru a demonstra această afirmație se duce o dreaptă oarecare l prin punctul A și se proiectează segmentul BC în B_1C_1 pe această dreaptă. Este evident că punctele segmentului B_1C_1 și numai acestea vor fi punctele locului geometric căutat care sînt situate pe dreapta l . Cînd dreapta l se rotește în jurul punctului A , atunci punctele B_1 și C_1 descriu sferele O_1 , respectiv O_2 , căci aceste sfere sînt locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte care trec prin A și B , respectiv prin A și C . Punctele B_1 și C_1 vor coincide cu punctul A atunci cînd dreapta este tangentă la sfera respectivă. În toate celelalte poziții dreapta l intersectează sferele O_1 și O_2 în punctele B_1 , respectiv C_1 și în punctul A .

Dreapta l intersectează discul închis \bar{k}_1 după segmentul AB , iar discul închis \bar{k}_2 după segmentul AC . Segmentul B_1C_1 este reuniunea segmentelor AB_1 și AC_1 dacă punctul A este situat între B_1 și C_1 , iar în caz contrar este diferența lor. Se vede ușor că în ambele cazuri segmentul B_1C_1 este acea porțiune de dreapta l care este acoperită numai de unul dintre segmentele AB_1 , AC_1 . Pe figură este reprezentată secțiunea domeniului căutat prin planul ABC .

Dacă punctul A se găsește pe dreapta BC , se obține cazul limită pentru cel general. Locul geometric va fi și în acest caz cel găsit: $(\bar{k}_1 \cup \bar{k}_2) \setminus (k_1 \cap k_2)$.

29. Dacă n este impar ($n = 2k + 1$), în poligonul $A_1A_2 \dots A_n$ se duce bisectoarea unghiului A_1 format de laturile a_1 și a_n . Se arată ușor că latura $A_{k+1}A_{k+2}$ este perpendiculară pe bisectoare.

Se proiectează în continuare pe bisectoare liniile frînte $A_1A_2A_3 \dots A_{k+1}$ și $A_1A_nA_{n-1} \dots A_{k+2}$. Proiecțiile acestor linii frînte trebuie să fie aceleași. Pe de altă parte, A_iA_{i+1} și $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ ($i \leq k$) formează unghiuri egale cu bisectoarea. Prin urmare, proiecțiile lui A_iA_{i+1} nu sînt mai mici decît proiecțiile lui $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$. De aici rezultă că dacă în succesiunea $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ se află cel puțin o inegalitate strictă, aceasta va fi și pentru proiecțiile laturilor respective tot o inegalitate strictă. În aceste condiții lungimea proiecției liniei frînte $A_1A_2A_3 \dots A_{k+1}$ va fi mai mare decît lungimea proiecției liniei frînte $A_1A_nA_{n-1} \dots A_{k+2}$, ceea ce nu este posibil. Prin urmare, toate laturile poligonului vor fi egale între ele.

Pentru $n = 2k$ se fac raționamente analoage, proiecția făcîndu-se însă pe o dreaptă perpendiculară pe A_1A_n și deci perpendiculară și pe A_kA_{k+1} .

30. Oricare ar fi y , sistemul de numere $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ este o soluție. Se vor căuta soluțiile nebanale (acele soluții pentru care cel puțin un x este nenul). Ecuațiile (1) și (5) se scriu sub forma echivalentă

$$x_2 = yx_1 - x_5, \quad (6)$$

$$x_4 = yx_5 - x_1, \quad (7)$$

iar ecuațiile (2), respectiv (4) sub forma

$$x_3 = yx_2 - x_1,$$

$$x_3 = yx_4 - x_5.$$

Se elimină x_2 și x_4 din ultimele două relații cu ajutorul lui (6) și (7), gășindu-se

$$x_3 = (y^2 - 1)x_1 - yx_5, \quad (8)$$

$$x_3 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1. \quad (9)$$

Astfel, sistemul de ecuații (1), (2), (4), (5) este echivalent cu sistemul de ecuații (6), (8), (9), (7).

Egalind între ele expresiile care dau pe x_3 din ecuațiile (8) și (9), se găsește

$$(y^2 - 1)x_1 - yx_5 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1$$

sau

$$(y^2 + y - 1)x_1 = (y^2 + y - 1)x_5. \quad (10)$$

Se consideră două cazuri:

$$1. \quad y^2 + y - 1 \neq 0; \quad 2. \quad y^2 + y - 1 = 0.$$

În primul caz, împărțind ambii membri ai ecuației (10) prin $y^2 + y - 1 \neq 0$, se obține $x_1 = x_5$. Permutînd ciclic numerotarea ecuațiilor și a necunoscutelor, se obține analog că toți x_i de indici consecutivi sînt egali între ei, adică $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Reiese deci că $y = 2$ în cazul cînd x_i sînt nenuli. Această soluție se verifică prin înlocuire în sistem.

În cel de-al doilea caz, $y^2 + y - 1 = 0$, adică $y^2 - 1 = -y$. În acest caz ecuațiile (8) și (9) reprezintă de fapt aceeași ecuație care este transcrisă de două ori:

$$x_3 = -y(x_1 + x_5). \quad (11)$$

Se verifică ușor că ecuația (3) este o consecință a ecuațiilor (6), (7) și (11). Într-adevăr,

$$x_2 + x_4 = (y - 1)(x_1 + x_5),$$

$$x_2 + x_4 = -x_3 \frac{y - 1}{y}. \quad (12)$$

Relația (3) dădea

$$x_2 + x_4 = yx_3.$$

Pentru a demonstra identitatea relațiilor (3) și (12) vom scădea din relația (12) relația (3), obținîndu-se

$$0 = x_3 \left(y + \frac{y - 1}{y} \right).$$

Aceasta este o identitate. Astfel, dacă y este o rădăcină a ecuației $y^2 + y - 1 = 0$, $y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, se pot alege, de exemplu, x_1 și x_5 cu totul arbitrar, x_2 se obține din formula (6), x_4 reiese din formula (7) iar x_3 din formula (11). Ecuațiile (1) — (5) sînt astfel automat satisfăcute, căci pentru astfel de valori ale lui y sînt consecințe ale ecuațiilor (6), (7) și (11).

31. Se înmulțește și se împarte în același timp membrul întâi al identității ce se cere demonstrată cu $2 \cos \frac{\pi}{14}$, care nu este nulă (sau cu $2 \sin \frac{\pi}{14}$). Se folosește apoi la numărător formula

$$2 \cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

și se obține

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \\ &= \frac{\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \\ &= \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

32. Este evident că dacă într-o pereche corect indicată intră un element corect indicat, atunci și celălalt element al perechii este corect indicat.

Sucesiunea $DAECB$ conține patru perechi: DA , AE , EC , CB . Două dintre acestea sînt prevăzute corect. Se admite că aceste două perechi au o literă comună. Se formează atunci un triplet în care ordinea este corect prăvăzută. Unde se pot găsi cele două litere corect indicate? Dacă una dintre acestea s-ar găsi în triplet, atunci tot tripletul ar consta din litere corect indicate, ceea ce nu se poate,

deoarece literele corect indicate nu sînt decît două. Dacă ambele litere căutate se găsesc în afara tripletului, atunci toate cele cinci litere sînt puse la locul lor, ceea ce, din nou, nu este posibil.

Astfel, dintre cele patru perechi trebuie alese două care nu au litere comune. Evident, aceasta se poate realiza în trei moduri

$$(DA, EC), (DA, CB), (AE, CB).$$

Se vede ușor că în fiecare caz una din cele două perechi trebuie să conțină literele corect indicate, iar cealaltă nu. Examinînd cele trei cazuri, se observă că în primul și al treilea caz aceasta se întîmplă într-un singur mod, iar în cel de-al doilea, în două moduri. Se găsesc astfel patru cazuri: $DABEC$, $EDACB$, $DACBE$, $AEDCB$. Examinînd aceste patru cazuri se obține că numai unul dintre acestea satisface condițiile problemei, anume $EDACB$.

33. a) Fie n multiplu de trei. În acest caz n se poate scrie sub forma $n = 3k$ și $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$. Diferența a două puteri cu același exponent se divide însă la diferența bazelor, deci $8^k - 1$ se divide la $8 - 1 = 7$. Prin urmare, $2^n - 1$ se divide la 7 dacă n este multiplu de 3.

Fie n nedivizibil la 3, adică $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$. Dacă $n = 3k + 1$, se găsește $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 = 2(7 + 1)^k - 1$, însă $(7 + 1)^k$ dă la împărțirea prin 7 restul 1 (aceasta rezultă, de exemplu, din binomul lui Newton), $2(7 + 1)^k$ prin împărțirea la 7 dă restul 2. Înseamnă că prin împărțirea la 7 a lui $2^n - 1 = 2(7 + 1)^k - 1$ se obține ca rest 1 și, prin urmare, pentru $n = 3k + 1$ numărul $2^n - 1$ nu se divide cu 7. Dacă $n = 3k + 2$, se găsește $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(7 + 1)^k - 1$. Prin împărțirea la 7 se obține restul 3.

În concluzie, $2^n - 1$ se împarte cu 7 dacă și numai dacă n este multiplu de 3.

b) Fie $n = 3k$. Atunci $2^n = 2^{3k} = 7m + 1$; $2^n + 1 = 7m + 2$ care nu se divide la 7.

Fie $n = 3k + 1$, caz în care $2^n + 1 = 2^{3k+1} + 1 = 2 \cdot 2^{3k} + 1 = 2(7m + 1) + 1 = 14m + 3$ care nu se divide la 7.

Pentru $n = 3k + 2$ se găsește că $2^n + 1 = 2^{3k+2} + 1 = 4 \cdot 2^{3k} + 1 = 4(7m + 1) + 1 = 28m + 5$ care de asemenea nu este multiplu de 7. Astfel, pentru nici un n numărul $2^n + 1$ nu se divide la 7.

Altă metodă de rezolvare. Fie a_k restul împărțirii lui 2^k la 7. Care este restul a_{k+1} pe care îl dă 2^{k+1} prin împăr-

țirea la 7? Este evident că a trebuie înmulțit cu 2 și scăzut apoi 7, dacă $2a \geq 7$. Astfel,

dacă $a_k = 1$, atunci $a_{k+1} = 2$,

dacă $a_k = 2$, atunci $a_{k+1} = 4$,

dacă $a_k = 4$, atunci $a_{k+1} = 1$.

Nu este necesar să se examineze celelalte cazuri. Este clar că șirul resturilor lui 2^n la împărțire prin 7 este 1, 2, 4, 1, 2, 4, ... Se obține astfel ușor rezolvarea problemei.

34. $(a - b)^2 \geq 0$, $(b - c)^2 \geq 0$, $(c - a)^2 \geq 0$, oricare ar fi a, b, c . Din faptul că a, b, c sînt laturi ale triunghiului rezultă că

$$b + c - a > 0, \quad c + a - b > 0, \quad a + b - c > 0.$$

Înseamnă că $(b - c)^2(b + c - a) \geq 0$, $(c - a)^2(c + a - b) \geq 0$,
 $(a - b)^2(a + b - c) \geq 0$.

Adunînd membru cu membru aceste inegalități, se obține

$$6abc - 2a^2(b + c - a) - 2b^2(a + c - b) - 2c^2(a + b - c) \geq 0,$$

de unde

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc.$$

Observație. Inegalitatea este valabilă și dacă singurele condiții sînt $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

35. Se înscrie un cerc în triunghiul ABC și se duc tangentele la cerc $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$, $C_1C_2 \parallel AB$ (fig. 22). Fie r raza cercului. Se înscriu cercuri în fiecare dintre noile triunghiuri, notîndu-se razele acestora cu r_1, r_2, r_3 , iar înălțimile lor din vîrfurile A, B, C se notează cu h_1, h_2, h_3 respectiv. Aria cercului înscris în triunghiul ABC este $S = \pi r^2$, $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}$, unde $p = \frac{a + b + c}{2}$,

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

• Triunghiurile AA_1A_2 , BB_1B_2 , CC_1C_2 sînt omotetice cu triunghiul ABC iar cercurile care sînt înscrise în acestea.

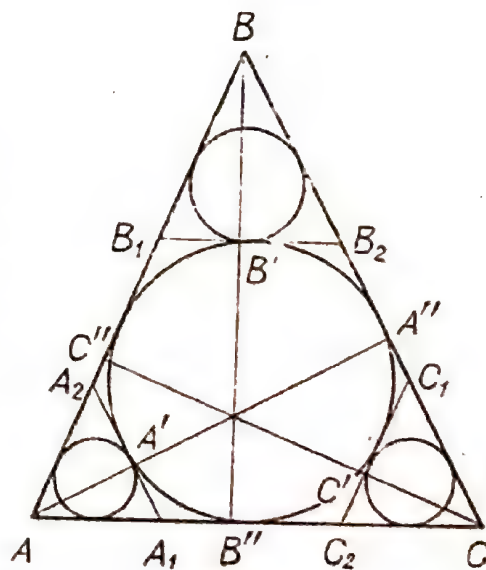


Fig. 22

sînt omotetice cu cercul de rază r . Prin urmare $\frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h_a}$, $\frac{r_2}{r} = \frac{h_2}{h_b}$,

$\frac{r_3}{r} = \frac{h_3}{h_c}$, unde h_a , h_b și h_c sînt înălțimile triunghiului ABC care corespund laturilor a , b , și c respectiv.

Distanțele dintre dreptele din perechile de drepte paralele B_1B_2 și AC , A_1A_2 și BC , C_1C_2 și AB vor fi egale cu $2r$, adică $A'A'' = B'B'' = C'C'' = 2r$. Prin urmare

$$h_1 = h_a - 2r, \quad h_2 = h_b - 2r, \quad h_3 = h_c - 2r,$$

$$h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a}, \quad h_b = \frac{2S_{\Delta ABC}}{b}, \quad h_c = \frac{2S_{\Delta ABC}}{c}.$$

De aceea

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a}, \quad r_1 = r - \frac{2r^2}{h_a},$$

$$r_1 = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} - \frac{2aS_{\Delta ABC}^2}{p^2 2S_{\Delta ABC}} = \frac{(p-a)S_{\Delta ABC}}{p^2}.$$

În mod analog

$$r_2 = \frac{(p-b)S_{\Delta ABC}}{p^2}, \quad r_3 = \frac{(p-c)S_{\Delta ABC}}{p^2},$$

$$\begin{aligned} S + S_1 + S_2 + S_3 &= \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2 = \pi \left(\frac{S_{\Delta ABC}^2}{p^2} + \frac{(p-a)^2 S_{\Delta ABC}^2}{p^4} + \right. \\ &+ \left. \frac{(p-b)^2 S_{\Delta ABC}^2}{p^4} + \frac{(p-c)^2 S_{\Delta ABC}^2}{p^4} \right) = \pi \frac{S_{\Delta ABC}^2}{p^4} [p^2 + (p-a)^2 + \\ &+ (p-b)^2 + (p-c)^2] = \frac{\pi (p-a)(p-b)(p-c)}{p^4} (p^2 + p^2 - 2ap + \\ &+ a^2 + p^2 - 2bp + b^2 + p^2 - 2cp + c^2) = \\ &= \frac{\pi(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)^3} (4p^2 - 4p^2 + a^2 + b^2 + c^2) = \\ &= \frac{\pi(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^3}. \end{aligned}$$

36. Se alege un savant la întâmplare. El corespundează cu fiecare dintre ceilalți 16 savanți numai pe singură temă. Se va demonstra că el corespundează pe cel puțin una din cele trei teme cu alți șase savanți. Presupunând această ipoteză falsă, înseamnă că el corespundează pe fiecare temă cu cel mult 5 savanți. Prin urmare, el nu corespundează pe cele trei teme mai mult decît cu 15 savanți, ceea ce contrazice condițiile problemei. Fie A această temă. Dacă printre acești șase savanți se găsește doi care corespundează între ei pe tema A , problema este rezolvată. În situația cînd nici unul din acești șase savanți nu corespundează cu vreun alt savant pe tema A , înseamnă că toți șase corespundează pe celelalte două teme. Un savant oarecare din cei șase corespundează cu ceilalți cinci. Există o temă pe care el corespundează cu trei din cei cinci, deoarece în caz contrar el ar corespunde numai cu patru savanți. Fie B această temă. Dacă unul din cei trei savanți corespundează cu altul din același grup de trei pe aceeași temă B , problema este rezolvată. Dacă toți trei corespundează între ei pe aceeași a treia temă (fie aceasta C), atunci ei constituie tripletul căutat. Deoarece au fost examinate toate cazurile, înseamnă că s-a demonstrat existența tripletului în cauză.

37. Toate dreptele sînt în număr de $C_5^2 = 10$. Prin fiecare punct, de exemplu C , trec patru drepte (fig. 23). Prin urmare, din fiecare punct ies cîte șase perpendiculare (după numărul dreptelor care nu trec prin acest punct). Se consideră două puncte arbitrare, de exemplu punctele B și C . Se numără punctele de intersecție ale perpendiculelor care trec prin punctul B cu perpendicularele care trec prin punctul C . Perpendicularele duse din punctul B pe dreptele care trec prin punctul C intersectează toate perpendicularele care sînt duse din punctul C . Prin punctul C trec trei drepte care nu trec prin B . Deci se pot duce din B trei perpendi-

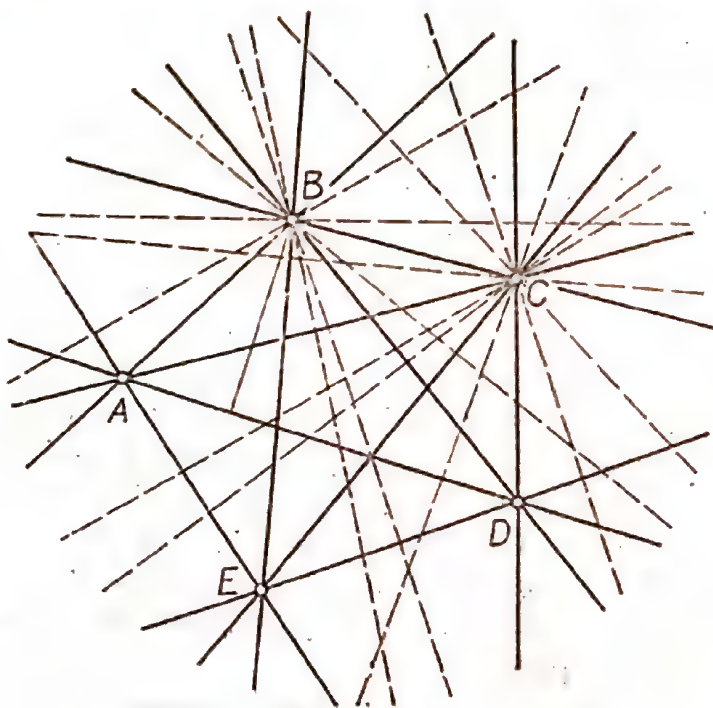


Fig. 23.

culare pe acestea. Ele se intersectează cu perpendicularele duse din punctul C în $3 \cdot 6 = 18$ puncte. Oricare altă perpendiculară dusă din B pe celelalte trei drepte care nu trec prin B , intersectează cinci perpendiculare duse din punctul C , pe cea de-a șasea neintersectînd-o, deoarece este perpendiculară pe aceeași dreaptă, și anume pe AD . Se obțin astfel încă 15 puncte. Prin urmare, perpendicularele care sînt duse din cele două puncte se intersectează în $13 + 15 = 33$ puncte. Cu cele cinci puncte se pot forma zece perechi. Rezultă că nu pot fi mai mult de $33 \cdot 10 = 330$ puncte de intersecție. Unele din aceste puncte coincid însă. Într-adevăr, oricare trei din cele cinci puncte date formează un triunghi. Înălțimile acestui triunghi, care sînt perpendiculare de tipul celor considerate mai sus, se intersectează într-un singur punct. Acest punct a fost numărat de trei ori. Din cauză că există în total $C_5^3 = 10$ astfel de triunghiuri, înseamnă că 10 puncte au fost numărate de trei ori. Rezultă că nu există mai mult de $330 - 30 + 10 = 310$ puncte de intersecție.

Juriul a considerat această problemă ca una combinatorică și nu a cerut să se demonstreze existența unui pentagon cu exact 310 puncte de intersecție a perpendicularelor. Demonstrația de mai jos aparține lui A.B.Sosinski.

Fie punctele date A_1, A_2, \dots, A_5 situate în poziția generală, adică diferite între ele și astfel încît dreptele d_k ce unesc perechea de puncte $A_i A_j$ sînt distincte două cîte două, nu sînt paralele și nici perpendiculare. Perpendicularele p_i duse din punctele A_i pe toate dreptele d_k se intersectează cîte trei într-un punct în „cazul ortocentrelor”, adică în cazul în care

$$A_{i_1} \in p_{j_1}, A_{i_2} \in p_{j_2}, A_{i_3} \in p_{j_3}$$

și

$$p_{i_1} \perp A_{i_2} A_{i_3}, p_{i_2} \perp A_{i_1} A_{i_3}, p_{i_3} \perp A_{i_1} A_{i_2}.$$

Se demonstrează că punctele A_1, \dots, A_5 se pot alege în poziție generală astfel ca să nu existe nici o intersecție de trei sau mai multe perpendiculare în același punct (în afară de cazul ortocentrelor). Dacă cele cinci puncte A_1, \dots, A_5 sînt în poziție generală, punctele care nu sînt ortocentre, dar în care se intersectează trei sau mai multe perpendiculare, se găsesc, oricum, în număr finit. De aceea afirmația făcută se obține imediat dacă se folosește succesiv următoarea propoziție :

Dacă H este intersecția a trei perpendiculare p_1, p_2, p_3 , însă nu este ortocentru al unui triunghi format de dreptele d_k (fig. 24),

atunci se poate schimba unul dintre punctele A_i cu punctul A'_i , astfel ca :

a) noile perpendiculare p'_1, p'_2, p'_3 să se intersecteze în trei puncte;

b) numărul celorlalte puncte de intersecție ale perpendicularelor să nu se micșoreze.

În continuare se demonstrează această propoziție. Notăția se va face astfel încît perpendiculara p_i să fie dusă din punctul A_i pe dreapta $d_i, i=1, 2, 3$. Fiindcă este exclus cazul

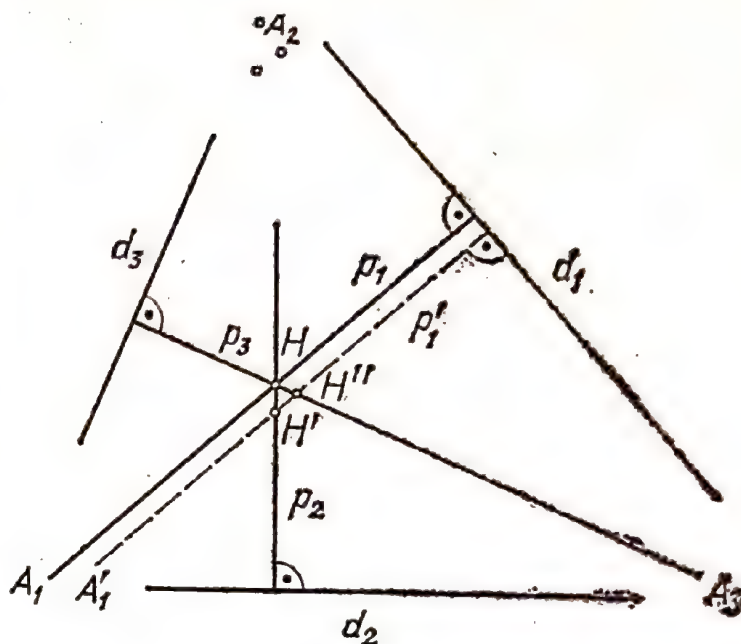


Fig. 24.

ortocentrelor, următoarele trei relații nu pot avea loc simultan : $A_1 = d_2 \cap d_3, A_2 = d_1 \cap d_3, A_3 = d_1 \cap d_2$, prin urmare, cel puțin una nu este adevărată. Considerăm, fără a restrînge generalitatea, că aceea este prima, adică $A_1 \neq d_2 \cap d_3$.

Se poate afirma, că dacă δ este un număr pozitiv arbitrar, se găsește un punct $A'_1 \neq A_1$ astfel încît este satisfăcută condiția a) iar $A'_1 A_1 < \delta (*)$. De fapt, dacă $A_1 \in d_2$ și $A_1 \in d_3$, se poate lua drept A'_1 orice punct diferit de A_1 și satisfăcînd condiția (*). Dacă $A_1 \in d_2$ (respectiv $A'_1 \in d_3$), drept A'_1 se poate lua orice punct $A'_1 \in d_2$ (respectiv $A'_1 \in d_3$) diferit de A_1 și satisfăcînd condiția (*). Atunci dreptele d_1, d_2, d_3 și perpendicularele p_2, p_3 nu se schimbă, în timp ce perpendiculara p_1 va fi înlocuită de dreapta $p'_1 \parallel d_1$ care trece prin punctul A'_1 și intersectează pe p_2 și p_3 respectiv în punctele diferite H' și H'' . Astfel, noile perpendiculare $p'_1, p'_2 \equiv p_2, p'_3 \equiv p_3$ se intersectează în trei puncte H, H', H'' , adică este îndeplinită condiția a).

Se poate afirma, că dacă numărul $\delta > 0$ este suficient de mic, se îndeplinește, de asemenea, și condiția b). Considerînd cunoscută noțiunea de continuitate a funcției, acest fapt este banal : coordonatele carteziene ale punctelor de intersecție ale perpendicularelor depind continuu de valorile coordonatelor punctelor A_i (într-o vecinătate a acestor valori). De aceea, pentru $\delta > 0$ suficient de mic, coordonatele acestor puncte de intersecție variază cu mai puțin decît jumătate din minimul distanței dintre o pereche de puncte A_i, A_j , de aceea nu se vor confunda între ele nici o pereche de astfel de puncte.

Demonstrația acestei propoziții se poate face fără a folosi explicit noțiunea de continuitate.

Fie r_0 jumătate din distanța minimă între două puncte de intersecție ale perpendicularelor, iar T punctul de intersecție a două perpendiculare oarecare p_i și p_j . Dacă punctul A_i se înlocuiește cu punctul A'_i , perpendicularele p_i și p_j se înlocuiesc cu perpendicularele p'_i și p'_j , obținându-se un nou punct de intersecție T' . Oricare din noile perpendiculare poate fi secantă, paralelă sau confundată cu cea inițială, fiind astfel posibile șase cazuri diferite. Se va examina cel mai complicat din acestea (fig. 25): p_i s-a rotit cu unghiul α , iar p_j este traslatată cu distanța r . Este evident că, alegând pe δ suficient de mic, se pot face pe α și pe r mai mici decât un număr fixat mai înainte. Se găsește în continuare

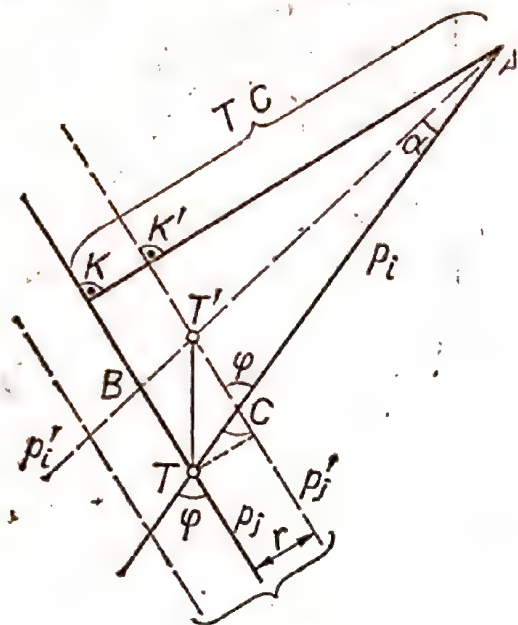


Fig. 25.

$$T'C = (h_0 - r) \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi \sin(\alpha + \varphi)} \quad \text{și} \quad TC = \frac{r}{\sin \varphi},$$

unde $\varphi = \angle(p_i, p_j)$, $C = p'_j \cap p_i$ iar h_0 este distanța de la A_i la p_j . Deoarece $\varphi > 0$, pentru α și r suficient de mici se găsește că $T'C < \frac{r_0}{2}$ și $TC < \frac{r_0}{2}$. Din această cauză, pentru δ suficient de mic

$$TT' < TC + T'C < \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0.$$

În celelalte cinci cazuri evaluări mai simple, care se vor omite, conduce la $TT' < r_0$. Astfel, alegând pe δ suficient de mic, punctele de intersecție se vor deplasa mai puțin decât cu r_0 , deci nu vor putea să coincidă, fiind îndeplinită în consecință condiția b). Propoziția este demonstrată.

38. Problema se va rezolva pentru cazul general.

Se consideră punctul oarecare D_1 situat în interiorul triunghiului ABC (fig. 26). Se duc dreptele $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ care intersectează planele fețelor opuse ale tetraedrului în punctele A_1, B_1 și C_1 respectiv. Se duc în triunghiul ABC dreptele AD_1, BD_1, CD_1 care intersectează laturile care li se opun în punctele A', B', C' . Dreapta A_1D trece prin punctul A' , fiindcă A_1D este situată în planul A_1BC și $AA_1 \parallel D_1D$. Se justifică analog faptul că dreapta B_1D trece prin punctul B' , iar dreapta C_1D trece prin punctul C' .

Se pun în vîrfurile triunghiului ABC greutatea x, y, z astfel ca centrul lor de greutate să fie în punctul D_1 . De exemplu

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{z}{x}, \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{y}{z},$$

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{x}{y}.$$

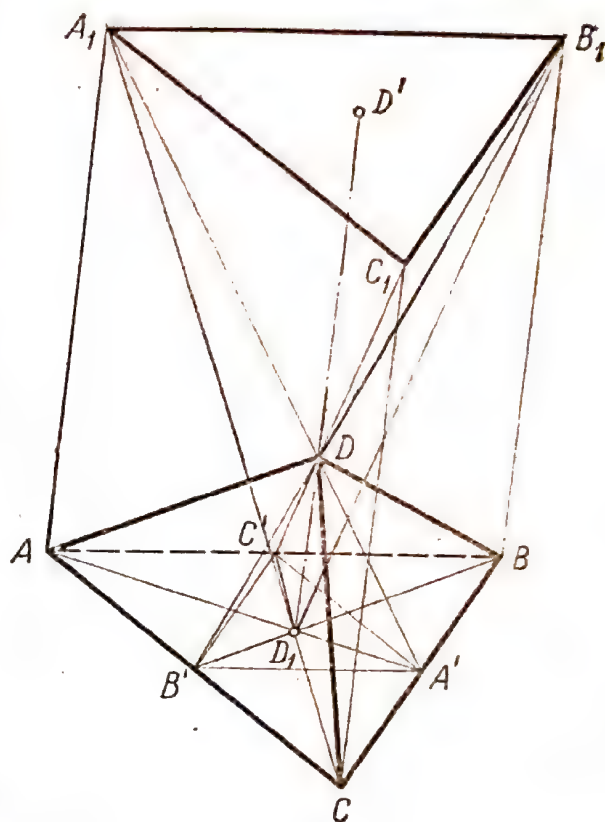


Fig. 26

Este suficient pentru aceasta să fie îndeplinite condițiile*:

$$x = B'C, \quad y = \frac{CA'}{A'B} \cdot AB', \quad z = AB'.$$

Se găsește

$$\frac{S_{\Delta AC'B'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} = \frac{yz}{(x+y)(x+z)}.$$

În mod analog

$$\frac{S_{\Delta BC'A'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xz}{(y+x)(y+z)} \quad \text{și} \quad \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xy}{(z+x)(z+y)}.$$

* În continuare se consideră cunoscut faptul că centrul de greutate al unui sistem de mase nu se schimbă, dacă o parte din acestea se înlocuiesc cu o masă egală cu suma lor, așezată în centrul de greutate al acestora. Pentru cazul a trei mase se obține identitatea (cu notațiile problemei) $AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB'$.

În acest caz

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - \frac{xy}{(x+z)(y+z)} - \frac{xz}{(x+y)(z+y)} - \frac{yz}{(y+x)(z+x)} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Fiindcă tetraedrele $ABCD$ și $A'B'C'D'$ au aceeași înălțime, rezultă

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

În continuare

$$\frac{A'D}{DA_1} = \frac{A'D}{D_1A} = \frac{x}{y+z}, \quad \frac{B'D}{B_1D} = \frac{y}{x+z}, \quad \frac{C'D}{C_1D} = \frac{z}{x+y}.$$

Deoarece unghiurile triedre $DA'B'C'$ și $DA_1B_1C_1$ sînt egale, volumele tetraedrelor $A'B'C'D$ și $A_1B_1C_1D$ sînt proporționale cu produsul muchiilor laterale, adică

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{A'D \cdot B'D \cdot C'D}{A_1D \cdot B_1D \cdot C_1D} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)},$$

însă

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 2 \frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}$$

sau $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$. Schimbăm în triunghiul ABC greutatea astfel: în punctul A' greutatea $\frac{y+z}{2}$, în punctul B' greutatea $\frac{x+z}{2}$ iar în punctul C' greutatea $\frac{x+y}{2}$. Centrul de greutate se păstrează astfel tot în punctul D_1 ; după aceea punem în vîrfurile A_1 , B_1 și C_1 respectiv greutățile $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ și $\frac{z}{2}$. Centrul de greutate al fiecăreia dintre perechile de puncte (A_1, A') , (B_1, B') , (C_1, C') va fi situat în punctul D , așa că

$$\frac{A_1D}{DA'} = \frac{AD_1}{D_1A'} = \frac{y+z}{x} = \frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}},$$

și analog pentru celelalte perechi. Aceasta înseamnă că și centrul total de greutate va fi situat în D . Pe de altă parte, centrul de greutate al punctelor A', B', C' este situat în punctul D_1 , iar masa sa este $x + y + z$. Centrul de greutate al punctelor A_1, B_1, C_1 este situat în planul $A_1B_1C_1$ și pe dreapta DD_1 , adică în punctul D_1 , iar masa sa este $\frac{x + y + z}{2}$. Prin urmare, $\frac{D_1D}{DD'} = \frac{1}{2}$ și $\frac{D'D_1}{D'D} = \frac{3}{2}$.

Accasta înseamnă că și raportul înălțimilor, duse din punctele D_1 și D pe planul $A_1B_1C_1$ este $\frac{3}{2}$. Tetraedrele $A_1B_1C_1D$ și $A_1B_1C_1D_1$

au însă aceeași bază $A_1B_1C_1$. Rezultă că $\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{3}{2}$, însă fiindcă $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$, va avea loc egalitatea $V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$.

39. Inegalitatea dată

$$2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}$$

se scrie sub forma sistemului

$$\begin{cases} 2 \cos x \leq |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}|, \\ |\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Se studiază prima inegalitate a sistemului. Fiindcă membrul drept al inegalității este totdeauna nenegativ, în domeniul soluțiilor vor intra toate valorile lui x pentru care $\cos x \leq 0$. Rezultă că toate valorile lui x pentru care $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ sînt soluții. Deci este suficient să căutăm soluțiile pentru care $\cos x > 0$. În acest caz ambii membri ai inegalității sînt pozitivi. Este posibilă deci ridicarea lor la pătrat:

$$4 \cos^2 x \leq 1 + \sin 2x - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} + 1 - \sin 2x.$$

Se obține, în continuare,

$$4 \cos^2 x \leq 2 - 2\sqrt{\cos^2 2x}, \quad 2 \cos^2 x \leq 1 - |\cos 2x|,$$

$$|\cos 2x| \leq 1 - 2 \cos^2 x = -(2 \cos^2 x - 1) = -\cos 2x.$$

Această inegalitate este satisfăcută pentru $\cos 2x \leq 0$. De aici rezultă

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ sau } \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + k\pi,$$

adică pentru $\cos x \geq 0$, x poate lua valorile $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ și $\frac{3}{2}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$. Împreună cu acele valori ale lui x pentru care $\cos x \leq 0$, se găsește că prima inegalitate a sistemului este satisfăcută pentru $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$.

Considerîndu-se cea de-a doua inegalitate a sistemului, ai cărei membri sînt amîndoi pozitivi, aceasta se ridică la pătrat:

$$1 + \sin 2x - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} + 1 - \sin 2x \leq 2;$$

$-2\sqrt{\cos^2 2x} \leq 0$ pentru orice valoare a lui x , deci soluțiile sistemului sînt

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\pi.$$

40. Fie (x_1, x_2, x_3) o soluție a sistemului, iar $|x_1| \geq |x_2| \geq |x_3|$. Oricare alt caz se reduce la cel considerat cu ajutorul unei permutări a indicilor 1, 2, 3 și a ecuațiilor din sistem. Dacă $|x_1| = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Fie $|x_1| \neq 0$; se obține

$$a_{11} + a_{12} \frac{x_2}{x_1} + a_{13} \frac{x_3}{x_1} \geq a_{11} - |a_{12}| \frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}| \frac{|x_3|}{|x_1|} \geq$$

$$\geq a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}| = a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0.$$

Se deduce de aici și din prima ecuație că

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| = |x_1| \left| a_{11} + a_{12} \frac{x_2}{x_1} + a_{13} \frac{x_3}{x_1} \right| > 0.$$

Contradicția obținută arată că este necesar ca $|x_1| = 0$, ceea ce se cerea. Această soluție se generalizează ușor pentru cazul unui sistem analog cu n ecuații și n necunoscute.

41. Fie planul situat la distanța x de CD (fig. 27). Atunci aria secțiunii (care este un paralelogram fiindcă $ML \parallel AB \parallel EN$ și $NL \parallel CD \parallel ME$) este dată de

$$ML \cdot ME \cdot \sin \omega =$$

$$= \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \sin \omega;$$

$$v_1 = \int_0^x \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \sin \omega \, dx =$$

$$= \left(\frac{abx^2}{2d} - \frac{abx^3}{3d^2} \right) \sin \omega.$$

În mod analog

$$v_2 = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2} \right) \sin \omega,$$

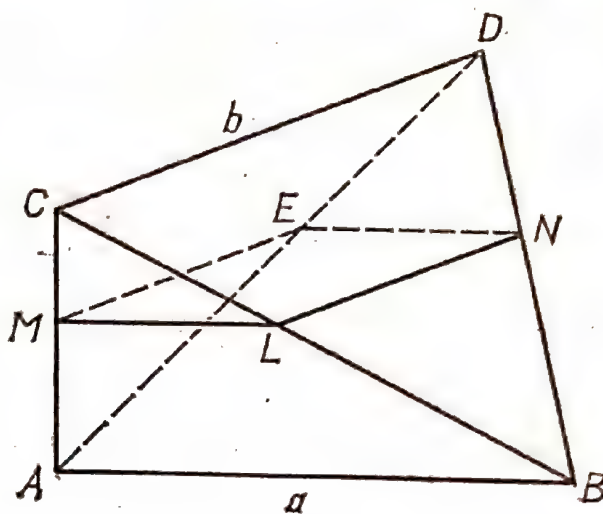


Fig. 27

unde s-a notat cu y distanța de la P la AB . Rezultă

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3dy^2 - 2y^3}{3dx^2 - 2x^3}.$$

Dar $x = \frac{d}{k+1}$, $y = \frac{dk}{k+1}$; deci

$$\frac{v_2}{v_1} = k^2 \frac{3 - \frac{2k}{k+1}}{3 - \frac{2}{k+1}} = k^2 \frac{k+3}{3k+1}.$$

42. Se notează $x_1 x_2 x_3 x_4 = p$. Sistemul de ecuații se scrie în acest caz sub forma

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Cazul când unul dintre numerele căutate este nul conduce la o contradicție. Într-adevăr, dacă se înlocuiește x_1 cu 0, se obține

$$x_2 x_3 x_4 = 2, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 2.$$

Astfel, toți x_i sînt rădăcini pentru aceeași ecuație de gradul al doilea : $x_i^2 - 2x_i + p = 0$. De aceea printre rădăcini se pot găsi numai două diferite între ele. Se vor examina trei cazuri:

I. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$, $m + m^3 = 2$. Pe baza monotoniei funcției $f(m) = m + m^3$ se va găsi o singură soluție reală $m = 1$.

II. Trei dintre numerele căutate sînt egale între ele și diferite de cel de-al patrulea. Fie $x_1 = x_2 = x_3 = m$ și $x_4 = n$,

$$\begin{cases} m + m^2n = 2, \\ n + m^3 = 2. \end{cases}$$

De aici rezultă $(m - n)(1 - m^2) = 0$.

Cazurile $m = n$ și $m = 1$ conduc la cel cunoscut. Cazul $m = -1$ dă $n = 3$, ceea ce mai aduce încă patru soluții.

III. $x_1 = x_2 = m$, $x_3 = x_4 = n$,

$$\begin{cases} m + mn^2 = 2, \\ n + nm^2 = 2. \end{cases}$$

Se deduce de aici că $(m - n)(1 - mn) = 0$. Cazul $m = n$ nu aduce soluții noi. Fie $mn = 1$. În acest caz $m + n = 2$, $m = n = 1$. Nu se obțin soluții noi.

Răspuns. 1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2, 3, 4, 5) Unul din x_i este 3, ceilalți sînt egali cu -1 .

43. Sînt date: $AA' \parallel MQ \parallel B'R \parallel PP' \perp OB$ (fig. 28), $MP \parallel BB' \parallel QQ' \parallel A'S \perp AO$.

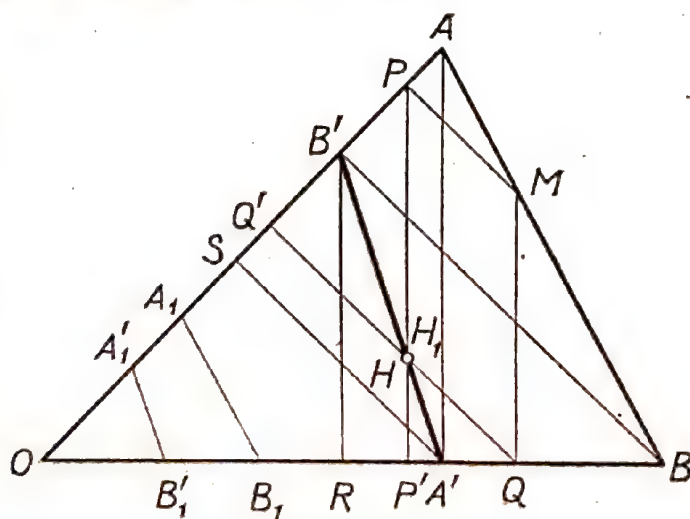


Fig. 28

a) Fie $\frac{AM}{MB} = k$. Astfel, fiindcă $\triangle AA'B \sim \triangle MQB$, $\frac{A'Q}{OB} = k$.

Ca o consecință a teoremei lui Tales, rezultă

$$\frac{SQ'}{Q'B'} = \frac{A'Q}{QB} = k \text{ și, în mod}$$

$$\text{analog, } \frac{A'P'}{P'R} = k.$$

Se demonstrează că locul geometric al punctelor H (H este punctul de intersecție a înălțimilor PP' și QQ' , ortocentrul triunghiului OPQ) este segmentul de dreaptă $A'B'$. Prin punctul P' al segmentului $A'R$ ($\frac{A'P'}{P'R} = k$) se duce perpendiculara pe acest segment. $\triangle RB'A' \sim \triangle P'H_1A'$ (H_1 este punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu segmentul $A'B'$). În continuare $\frac{A'H_1}{H_1B'} = k$, $\frac{SQ'}{Q'B'} = k$, adică $\triangle SA'B' \sim \triangle Q'H_1B'$ (au două laturi proporționale, iar unghiurile cuprinse între acestea sînt egale). Prin urmare, H_1Q' coincide cu înălțimea triunghiului OPQ , dusă pe OP , ceea ce înseamnă că $H \equiv H_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) La punctul a) s-a demonstrat că segmentul care unește picioarele A' și B' ale înălțimilor triunghiului AOB este locul geometric al punctelor H , în cazul în care punctul M parcurge segmentul AB .

Se consideră triunghiul A_1OB_1 ($A_1B_1 \parallel AB$). Este evident că acesta este triunghi asemenea cu triunghiul AOB și de aceea segmentul A_1B_1 este omotetic cu segmentul $A'B'$ cu coeficientul de omotetie egal cu $\frac{OA_1}{OA}$, iar centrul de omotetie este O .

Se obține, din considerente de continuitate, că atunci cînd punctul M parcurge interiorul triunghiului AOB , punctul H parcurge interiorul triunghiului $A'B'O$.

Observație. La punctul a) s-a demonstrat că punctul H este situat pe $A'B'$. Se demonstrează ușor că dacă $\frac{A'H}{HB'} = k$, atunci $\frac{AM}{MB} = k$, adică numai punctele segmentului AB satisfac această condiție. Dacă punctul H este luat în afara dreptei $A'B'$, punctul M va fi situat în afara dreptei AB .

Faptul că unghiurile OAB și OBA sînt ascuțite sau obtuze nu joacă nici un rol. Dacă mărimea unghiului AOB depășește 90° , figura va fi alta, iar raționamentele care au fost făcute își pierd valabilitatea pentru acest caz.

44. Se presupune că printr-un punct oarecare A al sistemului dat trec diametrele AB , AC și AD . Punctele B , C și D sînt situate în acest caz pe cercul K_1 care are centrul în punctul A și raza egală cu d . Toate celelalte puncte ale sistemului sînt situate fie pe cercul K_1 , fie sînt puncte interioare discului mărginit de cercul K_1 . Din cauză că fiecare din distanțele BC , BD și CD nu este mai mare decît d , punctele B , C și D se găsesc pe un arc al cercului K_1 , capabil de un unghi care nu depășește 60° . Fie punctul C situat în interiorul arcu-

lui BD , în condiția $\widehat{BD} \leq 60^\circ$. Fie K_2 cercul de centru C și rază $CA = d$. Toate diametrele sistemului dat de puncte care trec prin punctul C trebuie să aibă extremitățile pe arcul de cerc MN al cercului K_2 , situat în interiorul discului K_1 . Din cauză că orice punct al arcului MN , cu excepția punctului A , se găsește față de punctele B și D la o distanță mai mare decât d , rezultă că CA este singurul diametru care trece prin C .

Astfel s-a stabilit că pentru sistemul dat de n puncte ($n \geq 3$) există numai două posibilități: sau în sistem se găsește un punct prin care nu trece mai mult de un singur diametru, sau prin fiecare punct al sistemului trec exact două diametre. Este ușor să se demonstreze în continuare teorema căutată folosind metoda inducției matematice.

Pentru $n = 3$ teorema este evident adevărată. Se va arăta că din valabilitatea teoremei pentru k puncte (k număr natural și $k \geq 3$) rezultă valabilitatea acesteia și pentru $k + 1$ puncte. Considerăm sistemul format din $k + 1$ puncte A_1, A_2, \dots, A_{k+1} care are mai mult de un diametru. Dacă în acest sistem există un punct, fie acesta A_1 , din care nu iese nici un diametru sau din care iese un singur diametru, numărul de diametre în sistemul de puncte A_1, \dots, A_{k+1} este cel mult cu o unitate mai mare decât numărul diametrelor din sistemul de puncte A_2, \dots, A_{k+1} , adică nu depășește pe $k + 1$. Dacă nu există un astfel de punct, atunci din fiecare punct A_i ies exact două diametre și astfel numărul lor este $\frac{2(k+1)}{2} = k + 1$.

Numărul maxim n de diametre se obține, de exemplu, într-un poligon regulat avînd $n = 2k + 1$ laturi și de asemenea în cazul în care unul din puncte este centrul unui arc de cerc de rază d , iar celelalte $n - 1$ puncte sînt situate pe acest arc, unghiul între razele duse la punctele extreme fiind de 60° .

45. Se notează numărul concurențelor care au rezolvat numai problema B prin B , numărul celor care au rezolvat problema A și problema B prin AB etc. Condițiile problemei se exprimă prin patru ecuații:

$$A + B + C + AB + BC + AC + ABC = 25, \quad (1)$$

$$B + BC = 2(C + BC), \quad (2)$$

$$A - 1 = AB + AC + ABC, \quad (3)$$

$$A + B + C = 2(B + C). \quad (4)$$

Se observă că A, B, C, AB, BC, AC, ABC sînt, evident, numere întregi nenegative. Se va rezolva sistemul. Eliminînd pe ABC între ecuațiile (1) și (3), se obține

$$2A + B + C + BC - 1 = 25. \quad (5)$$

În continuare se găsește

$$BC = B - 2C, \quad (2')$$

$$A = B + C. \quad (4')$$

Dacă din ecuația (5) se scade ecuația (2') cît și dublul ecuației (4'), se găsește $4B + C = 26$, iar apoi

$$C = 26 - 4B, \quad (6)$$

$$BC = B - (52 - 8B) = 9B - 52. \quad (7)$$

Fiindcă B, C și BC sînt numere întregi nenegative, din (6) rezultă că $B \leq 6$, iar din (7) că $B \geq 6$. Aceasta înseamnă că dacă problema se poate rezolva, atunci $B = 6$.

Rezolvarea problemei este posibilă, fiindcă există cel puțin valorile $A = 8, B = 6, C = 2, AB = 3, AC = 2, BC = 2, ABC = 2$, care satisfac condițiile problemei.

În consecință, 6 elevi au rezolvat numai problema B .

46. Fiindcă α, β și γ sînt unghiurile triunghiului, înseamnă că

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Egalitatea din enunțul problemei se poate pune sub forma

$$a \left(1 - \operatorname{tg} \alpha \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) + b \left(1 - \operatorname{tg} \beta \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) = 0. \quad (1)$$

Înmulțind egalitatea (1) cu $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \alpha \cos \beta$, se găsește

$$a \cos \beta \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \alpha \right) + \\ + b \cos \alpha \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \beta \right) = 0. \quad (2)$$

Înlocuind expresiile din paranteze prin sinusul diferenței de unghiuri, se poate scrie

$$\sin \frac{\beta - \alpha}{2} (a \cos \beta - b \cos \alpha) = 0. \quad (3)$$

De aici rezultă că sau $\sin \frac{\beta - \alpha}{2} = 0$ și în acest caz $\alpha = \beta$, adică triunghiul este isoscel, sau expresia din paranteză este nulă, adică

$$a \cos \beta = b \cos \alpha. \quad (4)$$

Din teorema sinusurilor se obține

$$a \sin \beta = b \sin \alpha. \quad (5)$$

Prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai egalităților (4) și (5) și adunând apoi aceste egalități, se găsește

$$a^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \quad (6)$$

adică $a = b$, deci în condițiile problemei triunghiul este isoscel.

47. Tetraedrului dat $ABCD$ i se circumscrie o sferă. Prin vîrfurile A, B, C, D ale tetraedrului se duc planele tangente la sferă, obținîndu-se un nou tetraedru $A'B'C'D'$ omotetic cu cel dat, avînd raportul de omotetrie $k = -3$. Suma distanțelor la fețele tetraedrului $A'B'C'D'$ de la orice punct situat în interiorul sau pe fețele sale este constantă și egală cu înălțimea sa, sau cu volumul său împărțit prin o treime din aria unei fețe.

Fie punctul M situat în afara tetraedrului $A'B'C'D'$. Se vor considera patru tetraedre avînd pe M ca vîrf și drept fețe cele patru fețe ale tetraedrului $A'B'C'D'$. În acest caz tetraedrele $MA'B'C'$, $MA'B'D'$, $MA'C'D'$ și $MB'C'D'$ se întretaie. Nu este greu de observat că tetraedrul $A'B'C'D'$ este conținut în reuniunea lor. Într-adevăr, fie N un punct interior oarecare al tetraedrului

$A'B'C'D'$. Se poate arăta că acesta aparține cel puțin unuia din cele patru tetraedre. Se duce dreapta MN care intersectează cel puțin două din fețele tetraedrului. Considerăm acea față (sau una din acele fețe) pe care este situat punctul de intersecție cel mai îndepărtat. Se consideră tetraedrul avînd ca vîrfuri punctul M și vîrfurile acestei fețe. Punctul N va fi punct interior pentru acest tetraedru. Din această cauză suma volumelor acestor tetraedre este mai mare decît volumul tetraedrului $A'B'C'D'$ și, prin urmare, suma distanțelor de la punctul M la fețele tetraedrului $A'B'C'D'$ este mai mare decît înălțimea sa, iar suma oblicelor MA , MB , MC , MD cu atît mai mult va fi mai mare.

48. Fiindcă $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$, λ și k fiind numere întregi, înseamnă că $\sin 2^k x \neq 0$, iar $\operatorname{ctg} 2^k x$ și $\operatorname{ctg} 2^{k-1} x$ există. Însă

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\sin 2x}.$$

Identitatea dată se va demonstra prin inducție completă. Pentru $n = 1$ egalitatea este verificată, adică

$$\frac{1}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x.$$

Se face presupunerea că această egalitate are loc pentru $n = m$, adică

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^m x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^m x.$$

Se demonstrează apoi valabilitatea identității pentru $n = m + 1$:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^m x} + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} =$$

$$= (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^m x) + (\operatorname{ctg} 2^m x - \operatorname{ctg} 2^{m+1} x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^{m+1} x.$$

Rezultă din demonstrația dată că egalitatea în cauză este valabilă pentru orice valori naturale ale lui n .

Toate transformările sînt admise deoarece prin ipoteză s-au impus condiții restrictive asupra lui x .

49. Fiindcă sistemul considerat nu se schimbă dacă se înlocuiește indicele i cu indicele k și reciproc, se poate considera că $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. În acest caz

$$(a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1, \quad (1)$$

$$(a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1, \quad (2)$$

$$(a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1, \quad (3)$$

$$(a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1. \quad (4)$$

Din (1) se scade (2), din (2) se scade (3), iar din (3) se scade (4). Se obține

$$(a_1 - a_2)(x_2 + x_3 + x_4 - x_1) = 0,$$

$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0,$$

$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0,$$

și sistemul dat se scrie sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = x_1, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4, & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_4, & (7) \end{cases}$$

$$(a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1.$$

Din ecuațiile (5), (6) și (7) rezultă $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ și $x_1 = x_4$. În acest caz se obține din (4) $x_1 = \frac{1}{a_1 - a_4}$.

Verificarea arată că dacă $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, atunci într-adevăr $x_1 = x_4 = \frac{1}{a_1 - a_4}$, iar $x_2 = x_3 = 0$.

50. Ariile triunghiurilor care au un unghi egal sînt în același raport ca și produsul laturilor care formează acel unghi (fig. 29). De aceea

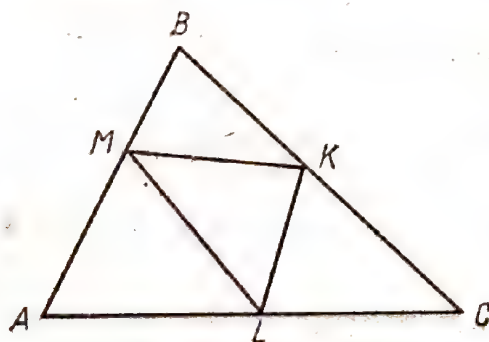


Fig. 29

$$\frac{S_{\Delta MBK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MB \cdot BK}{AB \cdot BC}, \quad (1)$$

$$\frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC}, \quad (2)$$

$$\frac{S_{\Delta KLC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{KC \cdot LC}{BC \cdot AC}. \quad (3)$$

Se presupune că

$$\frac{S_{\Delta MBK}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{\Delta KLC}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{1}{4}.$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități și folosind (1), (2) și (3), se găsește

$$\frac{BM \cdot BK \cdot AM \cdot AL \cdot CK \cdot CL}{AB \cdot BC \cdot AB \cdot AC \cdot BC \cdot AC} > \frac{1}{64}$$

sau

$$\frac{BM \cdot AM}{AB^2} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC^2} \cdot \frac{AL \cdot CL}{AC^2} > \frac{1}{64}.$$

Pe de altă parte, însă,

$$\sqrt{AM \cdot BM} \leq \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} \text{ și } \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \leq \frac{1}{4}.$$

În mod analog

$$\frac{BK \cdot CK}{BC^2} \leq \frac{1}{4}, \quad \frac{AL \cdot LC}{AC^2} \leq \frac{1}{4}.$$

Înmulțind termen cu termen aceste inegalități, se obține

$$\frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC^2} \cdot \frac{AL \cdot CL}{AC^2} \leq \frac{1}{64}.$$

S-a ajuns astfel la o contradicție. Din această cauză, se găsește un triunghi de arie care nu depășește $\frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$.

51. Triunghiului ascuțitunghic ABD (fig. 30) i se circumscrie un cerc, al cărui centru O este situat în interiorul triunghiului. Cel de-al patrulea vîrf C al paralelogramului $ABCD$ este situat în afara cercului circumscris. De fapt, dacă punctul C' este situat în interiorul cercului de cealaltă parte a dreptei BD față de punctul A , atunci $\angle BC'D$ are ca măsură fie jumătate din arc BAD (dacă punctul este situat

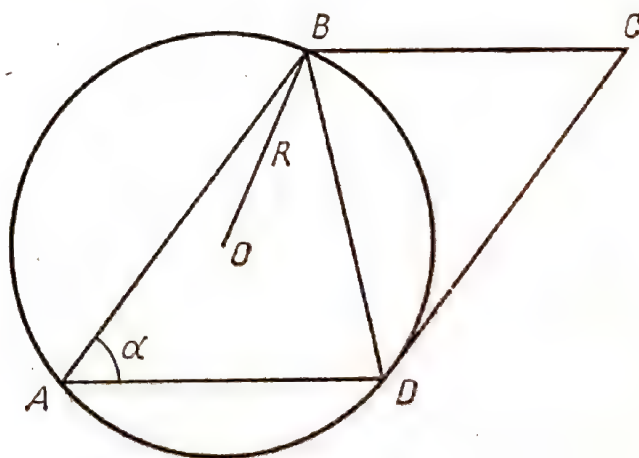


Fig. 30

pe cerc) fie poate fi mai mare. Însă arcul BAD este mai mare decât un semicerc, deoarece arcul complementar este capabil, prin definiție, de unghiul ascuțit BAD . S-a obținut o contradicție cu faptul că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD < 90^\circ$.

Se poate afirma că dacă paralelogramul este acoperit cu cercurile K_A, K_B, K_C, K_D , raza R a cercului circumscris triunghiului ABD nu depășește unitatea. Presupunând contrariul, adică $R = OA = OB = OD > 1$, cercurile K_A, K_B, K_D nu acoperă punctul O . Cercul K_C de asemenea nu poate acoperi punctul O , deoarece, așa cum s-a demonstrat mai înainte, $OC > R > 1$. Condiția ca $R \leq 1$ este deci necesară.

Această condiție este însă și suficientă. Fie $R \leq 1$. Din punctul O se duc perpendicularele pe laturile triunghiului ABD , care, după cum se știe, împart în părți egale laturile acestuia. Aceste perpendiculare împreună cu razele OA, OB, OC împart triunghiul ABD în șase triunghiuri dreptunghice, fiecare avînd ipotenuza egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABD . Evident, distanța de la vîrfurile unui triunghi dreptunghic la orice punct al său nu depășește lungimea ipotenuzei. Pentru fiecare punct $M \in \Delta ABD$ există un vîrf al unuia din cele șase triunghiuri dreptunghice aflat față de M la o distanță care nu depășește pe R . De aceea cercul K avînd centrul în vîrfurile respective acoperă punctul M . S-a demonstrat astfel că, în cazul în care $R \leq 1$, triunghiul ABD este acoperit în întregime de cercurile K_B, K_A și K_D . Din considerente de simetrie rezultă că și triunghiul CDB se acoperă cu cercurile K_C, K_D și K_B .

În continuare se va folosi formula $R = \frac{abc}{4S}$ care exprimă raza cercului circumscris unui triunghi prin lungimile laturilor sale și aria sa. În cazul de față $AD = 1$, $AB = a$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, iar din teorema sinusurilor se obține

$$BD = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}.$$

Rezultă astfel că

$$R = \frac{a \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}}{2a \sin \alpha} \leq 1. \quad (1)$$

Mulțimea de soluții a inecuației (1) va fi

$$S = \{a \mid \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha \leq a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha\}.$$

Inegalitatea $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha \leq a$ este satisfăcută deoarece triunghiul ABD este ascuțitunghic, $AD = 1$ și deci $a = AB >$

$> AD \cos \alpha = \cos \alpha$. Din această cauză, triunghiul ABD va fi acoperit cu cercurile K_A, K_B, K_D dacă și numai dacă

$$a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

52. Fie AB muchia cea mai mare a tetraedrului. În acest caz în $\triangle ACD$ și în $\triangle BCD$ (fig. 31) nici una din laturi nu depășește unitatea, iar înălțimile AF și BK , așa cum ușor se poate demonstra, nu depășesc $\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, unde $CD = a < 1$. Înălțimea tetraedrului $AS \leq AF \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, iar volumul tetraedrului este

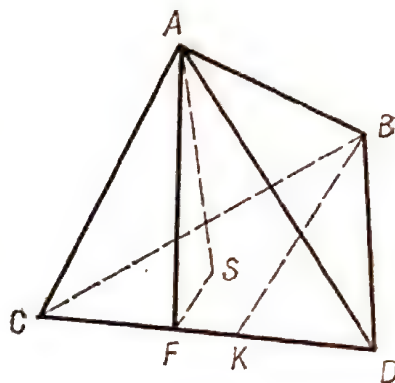


Fig. 31

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot AS \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24} a(4 - a^2).$$

Se caută maximul volumului tetraedrului pentru $a \leq 1$, determinându-se maximul funcției $f: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$, $f(x) = x(4 - x^2)$.

$$f(x) = x(4 - x^2) = 3 - (1 - x) - 2(1 - x^2) - x(1 - x)^2 \leq 3,$$

ceea ce arată că valoarea maximă căutată este $f(1) = 3$, obținându-se în consecință $V_{\max} = \max_{0 \leq a \leq 1} \frac{1}{24} a(4 - a^2) = \frac{1}{8}$. Rămîne să se mai

arate că există un tetraedru de volum $\frac{1}{8}$ și care să satisfacă condițiile problemei. Se ia $AC = CD = AD = BC = BD = 1$ și planul ACD perpendicular pe planul BCD . În aceste condiții $AB = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$.

Mulți dintre concurenți au căutat extremul funcției $f(x) = x(4 - x^2)$ cu ajutorul derivatei, unii dintre ei neobservînd că punctul de extrem care se obține astfel nu aparține intervalului pe care funcția este definită.

53. Se găsește mai întîi

$$C_p - C_q = p^2 + p - (q^2 + q) = (p - q)(p + q + 1).$$

Din aceasta rezultă că

$$\begin{aligned} & (C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \dots (C_{m+n} - C_k) = \\ & = (m+1-k)(m+1+k+1)(m+2-k)(m+2+k+1) \dots \\ & \dots (m+n-k)(m+n+k+1) = (m-k+1)(m-k+2) \dots \\ & \dots (m-k+n)(m+k+2)(m+k+3) \dots (m+k+n+1). \end{aligned}$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 \dots C_n &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot (n+1) = \\ &= n!(n+1)!. \end{aligned}$$

Astfel, trebuie să se demonstreze că

$$\frac{(m-k+1) \dots (m-k+n)}{n!} \cdot \frac{(m+k+2) \dots (m+k+n+1)}{(n+1)!}$$

este un număr întreg. Produsul a n numere întregi consecutive $(m-k+1) \dots (m-k+n)$ este divizibil cu $n!$. Acest fapt este evident pentru cazul când unul dintre factori este nul, binecunoscut pentru cazul când factorii sînt numere pozitive și reductibil la acest din urmă caz, dacă factorii sînt numere negative. A rămas astfel să se demonstreze că $(m+k+2)(m+k+3) \dots (m+k+n+1)$ este divizibil cu $(n+1)!$. Se consideră egalitatea

$$C_{m+k+n+1}^{n+1} = \frac{(m+k+1)(m+k+2) \dots (m+k+n+1)}{(n+1)!}.$$

Se știe că acest număr este întreg. Prin ipoteză $m+k+1$ este un număr prim mai mare ca $n+1$, de aceea $m+k+1$ nu se divide cu nici un factor prim al numărului $(n+1)!$. Aceasta înseamnă că numărul $(m+k+2) \dots (m+k+n+1)$ este divizibil cu $(n+1)!$. Astfel, produsul celor n numere întregi consecutive $(m+k+2) \dots (m+k+n+1)$ este divizibil prin $(n+1)!$.

54. Fie triunghiul ABC care satisface condițiile problemei. Vîrfurile B și C sunt situate pe arcul segmentului de cerc capabil de \hat{B}_1

(fig. 32) și sprijinindu-se pe segmentul A_0C_0 . Triunghiul $A_0B_0C_0$ și acest segment de cerc sînt situate de părți diferite ale dreptei A_0C_0 . Triunghiul $A_0B_0C_0$ este de fapt înscris în triunghiul ABC , din care

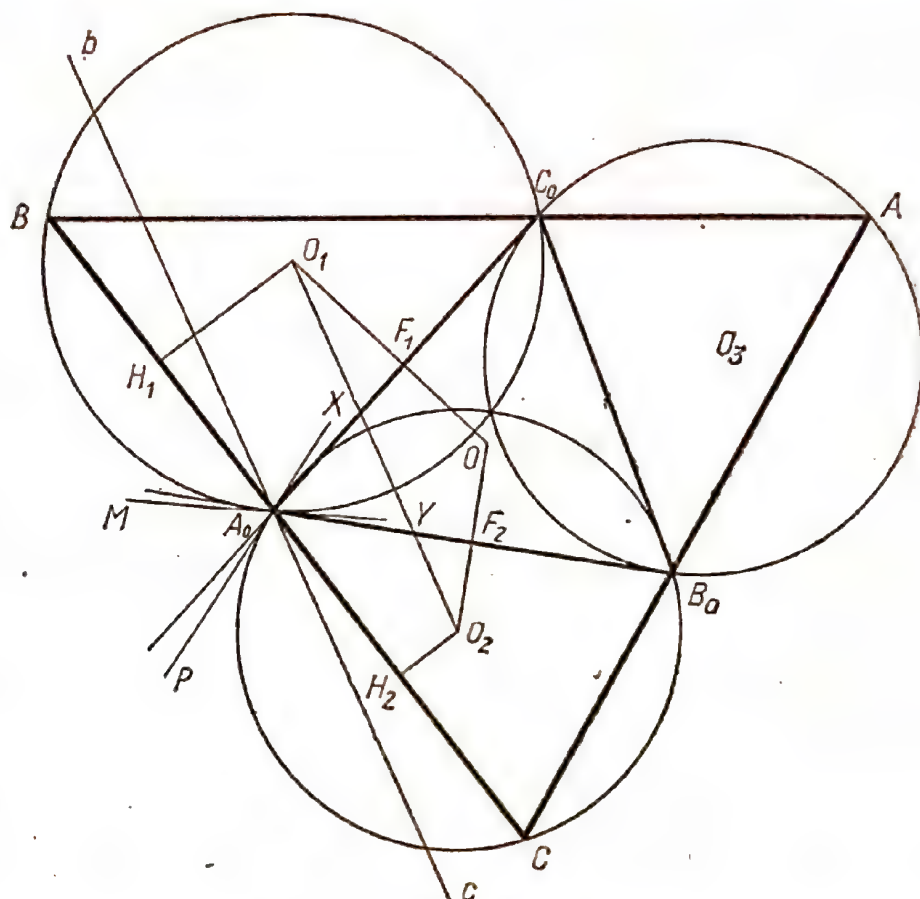


Fig. 32

cauza dreapta A_0C_0 , intersectînd segmentul AB în punctul C_0 , separă punctele B și A . Din aceleași motive ea separă punctele B și C . Rezultă că punctul B_0 , ca punct al segmentului AC , este situat față de punctul B de cealaltă parte a dreptei A_0C_0 . Într-un totu analog, vîrfurile C și A sînt situate pe arcele segmentelor de cerc capabile de \hat{C}_1 , respectiv \hat{A}_1 , aflate în exteriorul triunghiului $A_0B_0C_0$ și sprijinindu-se pe segmentele A_0B_0 și B_0C_0 . Centrele acestor segmente de cerc se vor nota cu O_1, O_2, O_3 . Din cauză că unghiurile A_1, B_1, C_1 sînt toate trei ascuțite, aceste centre vor fi situate în interiorul segmentelor de cerc, adică în afara triunghiului $A_0B_0C_0$.

Poziția dreptei BC se studiază mai îndeaproape. Se duce tangenta A_0M în punctul A_0 la cercul de centru O_1 , semidreapta A_0M fiind situată de aceeași parte a dreptei A_0C_0 ca și segmentul de cerc de centru O_1 . În acest caz segmentul de cerc de centru O_1 este situat în

întregime în unghiul semidreptelor A_0M și A_0C_0 , iar $\sphericalangle MA_0C_0 = 180^\circ - \hat{B}_1$.

Se vede ușor că orice semidreaptă cu originea în A_0 , care este situată în interiorul unghiului obtuz MA_0C_0 , intersectează segmentul de cerc de centru O_1 , în timp ce restul semidreptelor nu îl intersectează. Cu totul analog, semidreapta A_0C trebuie să fie situată în interiorul unghiului obtuz format de semidreptele A_0B_0 și A_0P , de cealaltă parte a dreptei A_0B_0 față de triunghiul $A_0B_0C_0$, iar $\sphericalangle B_0A_0P = 180^\circ - \hat{C}_1$. În continuare se va arăta că aceste două unghiuri obtuze MA_0C_0 și B_0A_0P nu se suprapun. Luînd în considerare unghiuri adiacente, începînd cu semidreapta A_0P , se obține

$$\begin{aligned} \sphericalangle PA_0B_0 + \sphericalangle B_0A_0C_0 + \sphericalangle C_0A_0M &= 360^\circ - \hat{B}_1 - \hat{C}_1 + \hat{A}_0 = \\ &= 180^\circ + \hat{A}_1 + \hat{A}_0, \end{aligned}$$

unghi care este mai mic decît 360° , deoarece \hat{A}_1 și \hat{A}_0 sînt unghiuri ascuțite. Aceasta înseamnă că într-adevăr semidreapta A_0M este situată, în ordinea parcurgerii, înaintea semidreptei A_0P .

În continuare se examinează între ce limite poate varia poziția semidreptei A_0B . Este evident că aceasta este situată în interiorul unghiului MA_0C_0 , ceea ce înseamnă că

$$0 \leq \sphericalangle C_0A_0B \leq 180^\circ - \hat{B}_1, \quad (1)$$

dacă ordinea de parcurgere este aceeași ca mai înainte. Condiția ca semidreapta A_0C (aflată în prelungirea semidreptei A_0B) să fie situată în interiorul unghiului PA_0B_0 se scrie sub forma $0 \leq \sphericalangle CA_0B_0 \leq \sphericalangle PA_0B_0$ sau

$$180^\circ \geq 180^\circ - \sphericalangle CA_0B_0 \geq 180^\circ - \sphericalangle PA_0B_0,$$

ceea ce dă

$$\hat{C}_1 \leq \sphericalangle C_0A_0B + \hat{A}_0 \leq 180^\circ,$$

întrucît

$$\sphericalangle CA_0B_0 + \sphericalangle B_0A_0C_0 + \sphericalangle C_0A_0B = 180^\circ,$$

sau, în cele din urmă

$$\hat{C}_1 - \hat{A}_0 \leq \sphericalangle C_0A_0B \leq 180^\circ - \hat{A}_0, \quad (2)$$

diferența $\hat{C}_1 - \hat{A}_0$ putînd fi atît pozitivă, cît și negativă. Un calcul analog relativ la punctul C_0 va arăta că (ținînd seama de schim-

barea ordinii de parcurgere cînd punctele A_0 și C_0 își schimbă locurile între ele):

$$0 \leq \sphericalangle BC_0A_0 \leq 180^\circ - \hat{B}_1,$$

$$\hat{A}_1 - \hat{C}_0 \leq \sphericalangle BC_0A_0 \leq 180^\circ - \hat{C}_0,$$

$$\sphericalangle C_0A_0B + \sphericalangle BC_0A_0 = 180^\circ - \hat{B}_1.$$

Prima condiție pentru punctul C_0 este echivalentă cu aceeași primă condiție în punctul A_0 , iar cea de-a doua arată că

$$\hat{C}_0 - \hat{B}_1 \leq \sphericalangle C_0A_0B \leq \hat{C}_0 + \hat{C}_1. \quad (3)$$

Au fost deduse trei condiții necesare pentru posibilitatea construcției triunghiului cerut de problemă, avînd vîrfurile în punctul B al segmentului de cerc de centru O_1 . Se va arăta în continuare că aceste trei condiții sînt și suficiente. Desfășurînd, de fapt, raționamentele în sens invers, se poate vedea că prelungirea A_0C a semidreptei A_0B dincolo de punctul A_0 este situată în interiorul unghiului MA_0C și, prin urmare, intersectează segmentul de cerc de centru O_2 într-un punct C . Din condițiile (3) se deduce, din aceeași cauză, că dreapta BC_0 intersectează segmentul de cerc de centru O_3 într-un punct A situat de cealaltă parte a lui C_0 față de punctul B . Prin construcție $\sphericalangle A_0BC_0 = \hat{B}_1$, $\sphericalangle B_0AC_0 = \hat{A}_1$, $\sphericalangle A_0CB_0 = \hat{C}_1$, fiind unghiuri înscrise în segmentele de cerc de centre O_1 , O_3 , respectiv O_2 . Punctul B_0 se află în interiorul unghiului B , format de semidreptele BA_0 și BC_0 , fiindcă dreptele BA_0 și BC_0 nu intersectează $\Delta A_0B_0C_0$, acestea trecînd prin vîrfurile A_0 , B_0 , respectiv C_0 pe baza condițiilor (1), (2) și (3). Aceasta înseamnă că în patrulaterul $ABCB_0$ unghiurile $\sphericalangle B_0AB$, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCB_0$ sînt interioare și suma lor este de 180° . Rezultă astfel că $\sphericalangle AB_0C = 180^\circ$ iar cele trei puncte A_0 , B_0 și C sînt coliniare.

Întrucît în cursul deducerii condițiilor (1) — (3) nu au fost impuse nici un fel de restricții privind compararea mărimilor unghiurilor triunghiurilor $A_0B_0C_0$ și ABC , se poate considera, fără a restrînge generalitatea, că

$$\hat{C}_0 + \hat{C}_1 \geq \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \text{ și } \hat{C}_0 + \hat{C}_1 \geq \hat{A}_0 + \hat{A}_1,$$

adică

$$\hat{C}_0 + \hat{C}_1 \geq \frac{1}{3} 360^\circ > 90^\circ. \quad (4)$$

Se vede astfel că aceste condiții (1) — (4) sînt îndeplinite, de exemplu, pentru cazul cînd $\sphericalangle C_0 A_0 B = 90^\circ$, deci într-adevăr există triunghiuri circumscrise. Din acestea trebuie găsit triunghiul care are arie maximă. Este evident că acesta va fi triunghiul care va avea cele mai lungi laturi, deoarece toate triunghiurile circumscrise sînt asemenea între ele, fiindcă au unghiuri egale cu unghiurile triunghiului $A_1 B_1 C_1$.

Se consideră un triunghi circumscris oarecare. Centrele O_1 și O_2 ale segmentelor de cerc se proiectează pe coarde $A_0 B$, respectiv $A_0 C$. Segmentul $H_1 H_2$ este proiecția segmentului $O_1 O_2$. Lungimea acestuia nu depășește lungimea lui $O_1 O_2$ și poate coincide numai dacă $BC \parallel O_1 O_2$. Se găsește ușor că

$$\begin{aligned}\sphericalangle O_2 A_0 O_1 &= \sphericalangle O_2 A_0 B_0 + \sphericalangle B_0 A_0 C_0 + \sphericalangle C_0 A_0 O_1 = \\ &= 180^\circ - \hat{C}_1 - \hat{B}_1 + \hat{A}_0 = \hat{A}_1 + \hat{A}_0 < 180^\circ.\end{aligned}$$

Din această cauză segmentul $O_1 O_2$ intersectează semidreptele $A_0 C_0$ și $A_0 B_0$ formînd cu acestea un triunghi $A_0 X Y$. Prin punctul A_0 se duce paralela bc la $O_1 O_2$. Aceasta va fi situată în afara triunghiului $A_0 B_0 C_0$ (în caz contrar ar intersecta segmentul XY), iar punctele O_1 și O_2 se vor afla de aceeași parte a sa ca și triunghiul $A_0 B_0 C_0$. Se presupune, fără a restrînge generalitatea, că semidreapta $A_0 b$ este situată de aceeași parte a dreptei $A_0 C_0$ ca și punctul O_1 .

Perpendicularele duse din punctele O_1 și O_2 respectiv pe coardele $A_0 C_0$ și $A_0 B_0$ trec prin mijloacele acestora F_1 și F_2 , intersectîndu-se în punctul O care este centrul cercului circumscris triunghiului $A_0 B_0 C_0$. Deoarece acest triunghi este ascuțitunghic, punctul O se află în interiorul triunghiului $A_0 B_0 C_0$.

Evident, $\sphericalangle O_2 O A_0 = \sphericalangle O_2 O B_0 = \hat{C}_0$ deoarece aceste unghiuri sînt capabile de arce ale cercului de centru O care au aceeași mărime. În mod analog, $\sphericalangle O_1 O A_0 = \hat{B}_0$,

$$\sphericalangle O_1 O O_2 = \sphericalangle O_1 O A_0 + \sphericalangle A_0 O O_2 = \hat{B}_0 + \hat{C}_0 < 180^\circ.$$

Din această cauză dreaptă $O_1 O_2$ separă punctul O de punctul A_0 . Rezultă astfel că

$$90^\circ - \hat{B}_1 = \sphericalangle C_0 A_0 O_1 < \sphericalangle C_0 X O_1 < 90^\circ$$

și, analog,

$$90^\circ - \hat{C}_1 = \sphericalangle B_0 A_0 O_2 < \sphericalangle B_0 Y O_2 < 90^\circ.$$

Ducînd prin punctul A_0 o dreaptă care face cu A_0C_0 un unghi egal cu $\angle C_0XO_1$, sînt verificate toate restricțiile de mai sus. Restricția (3) este de asemenea îndeplinită, deoarece $\hat{C}_0 - \hat{B}_1 < 90^\circ - \hat{B}_1$. În sfîrșit, găsindu-se legătura dintre $\angle B_0YO_2$ și $\angle C_0XO_1$, se constată că se îndeplinește și condiția (2). Aceasta înseamnă că se poate

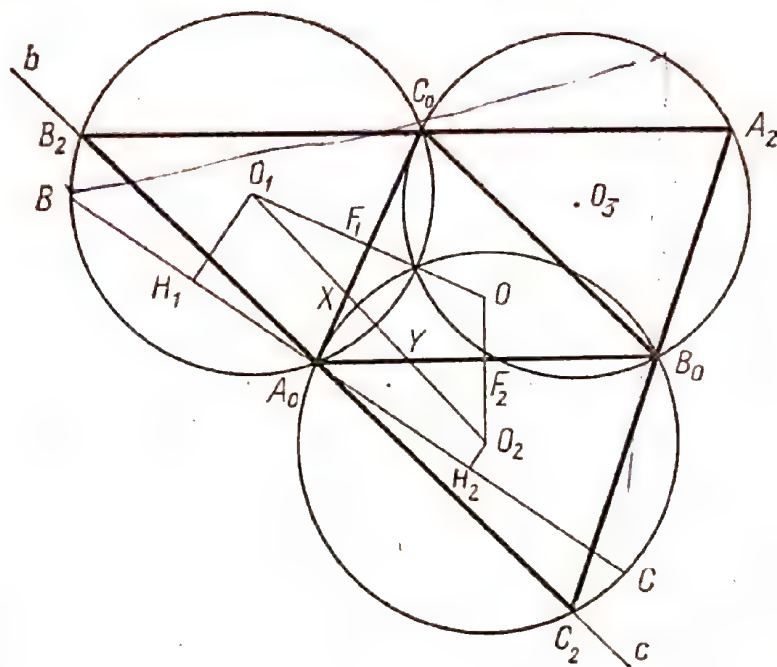


Fig. 33

circumscrie triunghiului $A_0B_0C_0$ un triunghi astfel ca latura B_2C_2 a acestuia (fig. 33) să fie paralelă cu O_1O_2 . În acest caz triunghiul obținut este cel căutat.

55. Este evident că sumele de puteri care au exponentul par sînt pozitive dacă numerele a_1, a_2, \dots, a_8 nu se anulează simultan. Dacă toate numerele a_1, a_2, \dots, a_8 sînt nule, atunci toți termenii c_n sînt nuli. Astfel, în cazul nebanal se pot anula numai sume de puteri care au exponenții impari. Se va demonstra că dacă printre sumele de acest tip există o infinitate de sume nule, atunci toate aceste sume trebuie să fie nule. În acest scop se va arăta din aproape în aproape, că dacă printre sumele de acest tip în care intră ca baze $2m$ numere reale există o infinitate care sînt nule, atunci aceste $2m$ numere se împart în m perechi astfel ca fiecare pereche să fie formată dintr-un număr pozitiv și din opusul său. Într-adevăr, fie b maximul modulelor numerelor a_k , printre aceste numere care au modulul b aflîndu-se p numere pozitive și q numere negative. Fără a restrînge generalitatea, se poate considera că aceste numere sînt

$a_1 = a_2 = \dots = a_p = b$, $a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = a_{p+q} = -b$, iar ultimele numere (în caz că există) au maximul modului egal cu d , $0 \leq d < b$. Atunci

$$c_{2k+1} = (p - q) b^{2k+1} + a_{p+q+1}^{2k+1} + \dots + a_{2m}^{2k+1}$$

și dacă $p \neq q$, adică $|p - q| \geq 1$, pentru k suficient de mare, mai precis pentru $2k + 1 > \frac{\log 4m}{\log b - \log d}$ are loc inegalitatea

$$|c_{2k+1}| > |p - q| b^{2k+1} - 2md^{2k+1} > \frac{1}{2} b^{2k+1},$$

ceea ce arată că începînd cu $2k + 1 = \left\lceil \frac{\log 4m}{\log b - \log d} \right\rceil + 1$, toți termenii șirului care au exponent impar sînt nenuli, ceea ce contrazice condițiile problemei. Rezultă că $p = q$ și deci suma primelor $p + q$ puteri din c_{2k+1} este totdeauna nulă. În consecință, printre sumele de puteri impare ale numerelor care rămîn, a_{p+q+1} , a_{p+q+2} , \dots , a_{2m} (în caz că au mai rămas numere) o infinitate vor fi nule. Repetîndu-se raționamentul se obține că în termenii impari ai șirului $\{c_n\}$ puterile se reduc două cîte două. S-a demonstrat deci că toți termenii impari ai șirului sînt nuli, pentru cazul general, cînd fiecare termen al șirului este o sumă de $2m$ puteri. Dacă $n = 4$, se regăsește cazul din enunțul problemei.

56. Problema are sens dacă $n > 1$. În ziua a $(n - k)$ -a au mai rămas de atribuit x_{n-k} medalii. În următoarea zi, cea de-a $(n - k + 1)$ -a au mai rămas un număr de $x_{n-k+1} = x_{n-k} - n + k - \frac{1}{7}(x_{n-k} - n + k)$ medalii, adică $x_{n-k+1} = \frac{6}{7}(x_{n-k} - n + k)$. Rezultă astfel

$$x_{n-k} = \frac{7}{6} x_{n-k+1} - k + n. \quad (1)$$

Folosind formula (1), se găsește $x_n = n$, fiindcă $x_{n+1} = 0$,

$$x_{n-1} = \frac{7}{6} n - 1 + n = \frac{7}{6} n + (n - 1),$$

$$x_{n-2} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 n + \frac{7}{6}(n - 1) + (n - 2),$$

.....

Se presupune că

$$x_{n-l} = \left(\frac{7}{6}\right)^l n + \left(\frac{7}{6}\right)^{l-1} (n-1) + \dots + \frac{7}{6} (n-l+1) + (n-l). \quad (2)$$

Formula (2) se va demonstra prin inducție matematică. Înmulțind ambii membri ai inegalității

$$x_{n-l+1} = \left(\frac{7}{6}\right)^{l-1} n + \dots + \frac{7}{6} (n-l+2) + (n-l+1) \quad (3)$$

cu $\frac{7}{6}$, adăugînd la fiecare dintre aceștia pe $n-l$ și înlocuind în (1), se găsește (2).

Deoarece în enunț este impusă condiția $x_1 = m$,

$$\begin{aligned} m &= \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} n + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} (n-1) + \dots + 2 \cdot \frac{7}{6} + 1 = \\ &= n \left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + \dots + 1 \right] - \left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{7}{6}\right)^{n-3} + \dots + (n-1) \right] = 6n \left[\left(\frac{7}{6}\right)^n - 1 \right] - \\ &\quad - 42 \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + 42 + 6(n-1) = 6(n-6) \left(\frac{7}{6}\right)^n + 36. \end{aligned}$$

Fiindcă numerele 7 și 6 sînt prime între ele, numărul $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ este întreg. Rezultă astfel că numărul n este divizibil cu 6. Oricare ar fi $n > 6$,

$$|n-6| < n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} < 2^{n-1} < 6^{n-1}.$$

Astfel $|n-6| < 6^{n-1}$, însă, deoarece $\frac{n-6}{6^{n-1}} < 1$ este un număr întreg, rezultă că $n-6=0$, adică $n=6$, fiindcă singurul număr întreg nenegativ mai mic decît 1 este zero. În acest caz rezultă că $m=36$.

Se verifică ușor că $n=6$ și $m=36$ satisfac condițiile problemei.

57. Rezolvarea I. Din teorema sinusurilor (fig. 34) se găsește

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ sau } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 2A} = \frac{c}{\sin 3A},$$

deoarece $B = 2A$ și, în consecință, $b > a$. Se notează $\frac{a}{\sin A} = \lambda$.

Din relațiile

$$a^2 = \lambda^2 \sin^2 A, \quad b^2 = \lambda^2 \sin^2 2A, \quad c^2 = \lambda^2 \sin^2 3A,$$

rezultă

$$b^2 - a^2 = \lambda^2 (\sin^2 2A - \sin^2 A), \quad ac = \lambda^2 \sin A \cdot \sin 3A.$$

Se poate arăta, printr-un calcul simplu, că

$$\sin^2 2A - \sin^2 A = \sin A \sin 3A,$$

și deci, în triunghiul considerat, $b^2 - a^2 = ac$ sau $b^2 = a(a + c)$. Se consideră această relație sub forma $b^2 = a(a + c)$. Sînt posibile următoarele cazuri:

1) $a = n$, $b = n + 1$, $c = n + 2$. În aceste condiții $(n + 1)^2 = n(2n + 2)$, adică $n^2 - 1 = 0$, ceea ce înseamnă că $n = 1$, iar $a = 1$, $b = 2$ și $c = 3$, deci triunghiul va degenera într-un segment.

2) $a = n$, $b = n + 2$, $c = n + 1$. Se obține $(n + 2)^2 = n(2n + 1)$, adică $n = 4$, iar $a = 4$, $b = 6$ și $c = 5$. Triunghiul ale cărei laturi au lungimile $a = 4$, $b = 6$ și $c = 5$ constituie rezolvare a problemei.

3) $c = n$, $a = n + 1$, $b = n + 2$. În consecință $n^2 - n - 3 = 0$, obținîndu-se o ecuație în necunoscuta n care nu are rădăcini întregi.

Se va demonstra în continuare că triunghiul găsit în cazul al doilea este, într-adevăr, rezolvare a problemei, adică unghiurile sale satisfac condiția cerută în enunț.

Calculîndu-se $\cos A$ și $\cos B$, se obține, cu ajutorul teoremei cosinusului, $\cos A = \frac{3}{4}$ și $\cos B = \frac{1}{8}$, adică $\cos 2A = \cos B$ și deci $B = 2A$.

Rezolvarea II. Se duce bisectoarea BD a unghiului B (fig. 35) și se notează $CD = b_1$, $DA = b_2$. Triunghiul BCD este

astfel asemenea cu triunghiul ABC și, prin urmare, $\frac{c}{b_2} = \frac{a}{b_1} = \frac{b}{a}$, ceea ce arată că $a = b_1 \cdot \frac{b}{a}$ și $c = b_2 \cdot \frac{b}{a}$. Prin adunarea acestor două relații se obține

$$(b_1 + b_2) \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = c + a,$$

care este număr întreg. Deoarece în enunțul problemei se dă că

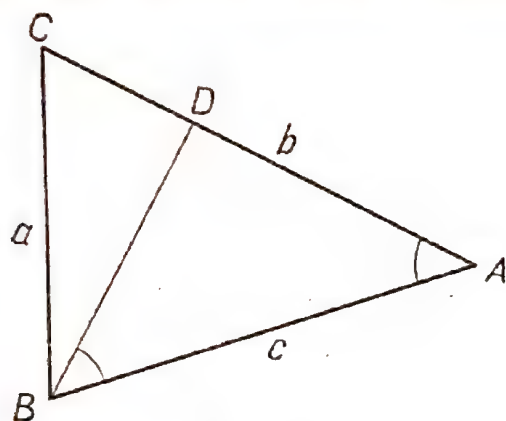


Fig. 34

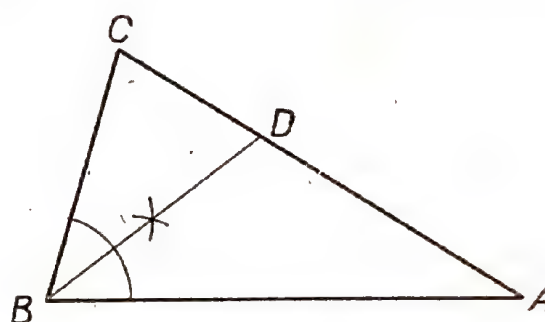


Fig. 35

lungimile laturilor sînt numere întregi consecutive și $b > a$, înseamnă că sau 1) $b = a + 1$ sau 2) $b = a + 2$.

1) $b = a + 1$, $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}$ și deci $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ iar triunghiul este degenerat.

2) $b = a + 2$, $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a} = a + 4 + \frac{4}{a}$, ceea ce arată că a este divizor al lui 4. Din această cauză, sau $a = 1$ sau $a = 2$ sau $a = 4$.

Dacă $a = 1$, atunci $b = 3$ și $c = \frac{b^2}{a} - a = 8$, ceea ce nu satisface condiția.

Dacă $a = 2$, atunci $b = 4$ și $c = 6$, ceea ce, din nou, nu satisface condiția din enunț.

Dacă $a = 4$, atunci $b = 6$ și $c = 5$, obținîndu-se rezolvarea problemei.

58. Deoarece produsul cifrelor unui număr este nenegativ, atunci $x^2 - 10x - 22 \geq 0$ și, prin urmare, $x \geq 5 + \sqrt{47} > 11$.

Se va demonstra mai întâi că produsul cifrelor oricărui număr nu este mai mare decât însuși numărul. Fie $x = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$. În acest caz

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \leq a_1 \cdot 9^{n-1} \leq a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n = x.$$

De aici rezultă că $x^2 - 10x - 22 \leq x$ și, în consecință, $x \leq \frac{11}{2} +$

$+\frac{\sqrt{209}}{2} < 13$. Numărul întreg x va satisface astfel inegalitățile

$11 < x < 13$, ceea ce înseamnă că $x = 12$.

Verificare : $144 - 120 - 22 = 1 \cdot 2$.

59. Fie $y_1 = x_2 - x_1$, $y_2 = x_3 - x_2, \dots, y_k = x_{k+1} - x_k, \dots, y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$, $y_n = x_1 - x_n$.

Astfel $y_k = ax_k^2 + (b-1)x_k + c$, iar $\sum_{k=1}^n y_k = 0$.

a) Dacă $(b-1)^2 - 4ac < 0$, polinomul $ax^2 + (b-1)x + c$ nu are rădăcini reale și ia valori de un singur semn, de aceea sau toți $y_k > 0$ sau toți $y_k < 0$, ceea ce nu se poate deoarece $\sum_{k=1}^n y_k = 0$.

Rezultă că sistemul nu are soluții reale.

b) Dacă $(b-1)^2 - 4ac = 0$, polinomul $ax^2 + (b-1)x + c$ se anulează numai pentru o singură valoare a lui x , găsind în acest caz fie toți $y_k \geq 0$, fie toți $y_k \leq 0$; deoarece $\sum_{k=1}^n y_k = 0$, înseamnă că toți $y_k = ax_k^2 + (b-1)x_k + c = 0$ și în acest caz $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x_0$, x_0 fiind rădăcina dublă a trinomialului de gradul doi $ax^2 + (b-1)x + c$. Sistemul are deci o soluție reală unică.

c) Dacă $(b-1)^2 - 4ac > 0$, sistemul are cel puțin două soluții și anume toți $x_k = x'_0$ și toți $x_k = x''_0$, prin x'_0 și x''_0 înțelegând rădăcinile polinomului $ax^2 + (b-1)x + c$, întrucât $x_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

60. Se notează cu A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) vîrfurile tetraedrului, iar cu $a_{ik} = a_{ki}$ lungimea muchiei $A_i A_k$. Fie a_{12} lungimea unei muchii care nu este mai scurtă decât celelalte, adică

$$a_{12} \geq a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, i \neq k).$$

În triunghiurile $A_1 A_2 A_3$ și $A_1 A_2 A_4$

$$a_{12} < a_{13} + a_{23}, \quad a_{12} < a_{14} + a_{24}.$$

Rezultă astfel că

$$2a_{12} < a_{13} + a_{23} + a_{14} + a_{24}. \quad (1)$$

Dacă se presupune că nu se poate construi un triunghi cu segmentele de lungime a_{12} , a_{13} și a_{14} , înseamnă că

$$a_{12} \geq a_{13} + a_{14}. \quad (2)$$

Din inegalitățile (1) și (2) rezultă că $a_{12} < a_{23} + a_{24}$, fiind posibil în acest caz să se construiască triunghiul cu segmentele de lungime a_{12} , a_{23} și a_{24} .

61. a) Se demonstrează că funcția are perioada $2a$. Se vede din enunț că $f(x+a) > \frac{1}{2}$ pentru orice x . Trecând în membrul întâi pe $\frac{1}{2}$ și ridicând la pătrat, se obține

$$\left[f(x+a) - \frac{1}{2} \right]^2 = f(x) - [f(x)]^2$$

sau

$$[f(x+a)]^2 - f(x+a) = f(x) - [f(x)]^2 - \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Folosind proprietatea din enunț a funcției, se găsește

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2}$$

și ținând seama de relația (1), rezultă

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{[f(x)]^2 - f(x) + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = f(x),$$

deoarece $f(x) > \frac{1}{2}$.

b) Dacă $a=1$, se verifică ușor că proprietatea din enunț este îndeplinită de funcția (fig. 36)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 2n \leq x < 2n+1, \\ 1 & 2n+1 \leq x < 2n+2. \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Poate fi dat și un exemplu mai complicat (fig. 37) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - n & 2n \leq x \leq 2n + 1, \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}x - n - \left(\frac{1}{2}x - n\right)^2}, & 2n + 1 \leq x \leq 2n + 2, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

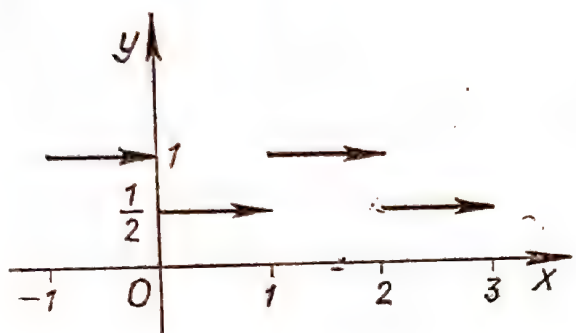


Fig. 36

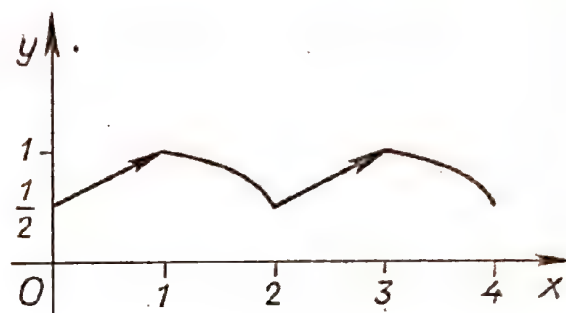


Fig. 37

62. Rezolvarea I. Se folosește lema

$$\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x].$$

Demonstrație. Orice număr x poate fi scris sub forma $x = k + \alpha$, fie sub forma $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$, k fiind număr întreg iar $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

În cazul în care $x = k + \alpha$ se găsește $\left[k + \alpha + \frac{1}{2} \right] = k$,

$$[2k + 2\alpha] = 2k, [k + \alpha] = k, \text{ adică } \left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x].$$

În celălalt caz, cînd $x = k + \frac{1}{2} + \alpha$, se obține $\left[k + \frac{1}{2} + \alpha + \frac{1}{2} \right] = k + 1$, $[2k + 2\alpha + 1] = 2k + 1$, $\left[k + \frac{1}{2} + \alpha \right] = k$, deci și în acest caz $\left[x + \frac{1}{2} \right] = [2x] - [x]$. Lema este astfel demonstrată.

Se va aplica lema la calculul sumei din enunț:

$$\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{n}{4} + \frac{1}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right] + \dots =$$

$$= [n] - \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] - \left[\frac{n}{4} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2^k} \right] - \left[\frac{n}{2^{k+1}} \right] + \dots = n,$$

deoarece pentru $k > \log_2 n$ termenul $\left[\frac{n}{2^k} \right]$ și toți cei care urmează sînt nuli.

Rezolvarea II. Se observă că din moment ce $2^i > n$, termenul de rang i și cei care îi urmează sînt nuli, deci suma considerată este finită. Dacă se trece de la $n = k - 1$ la $n = k$, fiecare termen al sumei sau rămîne neschimbat sau se mărește cu o unitate. Dacă termenul se mărește cu o unitate, atunci există numărul m întreg astfel încît

$$\frac{k - 1 + 2^i}{2^{i+1}} < m \leq \frac{k + 2^i}{2^{i+1}}.$$

În consecință, $k - 1 < m \cdot 2^{i+1} - 2^i = 2^i(2m - 1) \leq k$. Rezultă astfel că numărul întreg $k = 2^i(2m - 1)$. Pentru fiecare k există însă numai o singură valoare a lui i ($i \geq 0$) pentru care aceasta are loc. Reciproc, pentru $k = 2^i(2m - 1)$ termenul corespunzător se mărește cu o unitate. De aceea, fiindcă pentru $n = 1$ suma are valoarea 1 și se mărește cu cîte o unitate cînd n se mărește cu o unitate, înseamnă că suma cerută are valoarea n .

63. Fie $a = 4k^4$ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$). În acest caz

$$z = n^4 + a = n^4 + 4k^4 = n^4 + 4n^2k^2 + 4k^4 - 4n^2k^2 =$$

$$= (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk),$$

$$n^2 + 2k^2 - 2nk = (n - k)^2 + k^2 \geq k^2 > 1,$$

$$n^2 + 2k^2 + 2nk = (n + k)^2 + k^2 > k^2 > 1,$$

ceea ce înseamnă că z este produs a doi factori, fiecare fiind mai mare decît 1. Numărul z este deci număr compus pentru mulțimea de valori ale lui a de forma $a = 4k^4$, $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 64. \quad f(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\cos(a_i + x)}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{\cos[(a_i + x_1) + (x - x_1)]}{2^{i-1}} = \\
 &= \cos(x - x_1) \sum_{i=1}^n \frac{\cos(a_i + x_1)}{2^{i-1}} - \sin(x - x_1) \sum_{i=1}^n \frac{\sin(a_i + x_1)}{2^{i-1}} = \\
 &= \cos(x - x_1) f(x_1) + \sin(x - x_1) f\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right).
 \end{aligned}$$

În enunț se dă $f(x_1) = 0$. Dacă $f\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right) = 0$, atunci $f(x) \equiv 0$, însă

$$f(-a_1) = \cos 0 + \sum_{i=2}^n \frac{\cos(a_i - a_1)}{2^{i-1}} \geq 1 - \sum_{i=2}^n \left| \frac{\cos(a_i - a_1)}{2^{i-1}} \right| \geq 1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{2^{i-1}} > 0.$$

Rezultă că $f(x) \neq 0$ și $f\left(\frac{\pi}{2} + x_1\right) \neq 0$. Din enunțul problemei rezultă că $f(x_2) = 0$, deci $\sin(x_2 - x_1) = 0$, adică $x_2 - x_1 = m\pi$.

65. Se consideră, succesiv, toate cazurile posibile.

a) $k=1$. Fie $AB=a$, $AD=AC=CB=BD=CD=1$, iar M mijlocul muchiei CD (fig. 38). Atunci din $\triangle BCD$ se obține $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar din $\triangle ACD$, analog,

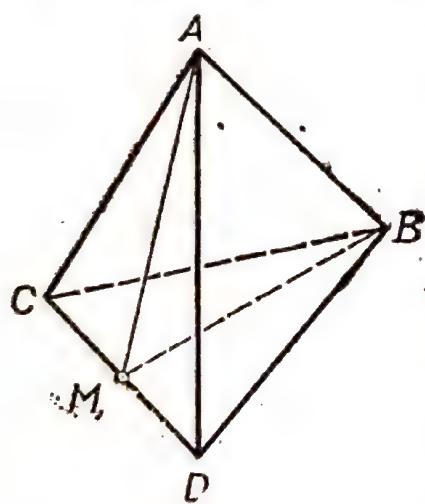


Fig. 38

$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. În $\triangle ABM$ avem $AB < AM + BM$, adică $AB < \sqrt{3}$ sau $a < \sqrt{3}$. Această condiție este și suficientă. Într-adevăr, se poate construi totdeauna un tetraedru care să aibă fețele ACD și CBD triunghiuri echilaterale de latură 1, iar muchia AB să aibă lungimea $a < \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = AM + BM$.

b) $k=2$. În acest caz există două posibilități:

1) Muchiile de lungime a pleacă din același vîrf. Atunci

$$AC = AD = a, AB = BC = BD = CD = 1.$$

În acest caz din $\triangle BCD$ (fig. 38) se găsește că $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar din $\triangle AMC$ se găsește că $AM = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$. În $\triangle ABM$ avem $AB - BM < AM < AM + BM$ și se obține

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Toți membrii acestor inegalități sînt pozitivi. Ridicînd pe toți aceștia la pătrat, se obțin inegalitățile echivalente

$$1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} < a^2 - \frac{1}{4} < 1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4}.$$

În consecință

$$2 - \sqrt{3} < a^2 < 2 + \sqrt{3} \text{ și deci } \sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Această condiție este și suficientă, ceea ce se poate stabili prin construcția unui tetraedru care o verifică. Se construiește, de exemplu, triunghiul echilateral BCD , iar prin mijlocul M al muchiei CD se construiește planul perpendicular pe CD . În acest plan se descrie un cerc de rază egală cu 1 avînd pe B ca centru, și se găsește punctul A , cel de-al patrulea vîrf al tetraedrului, situat pe acest cerc, aflat față de M la distanța AM astfel ca

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < AM < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Muchiile de lungime a sînt opuse. Atunci $AB = CD = a$, $AC = AD = BC = BD = 1$. Din $\triangle MBD$, și analog din triunghiurile MAD și ABM (fig. 38) se găsește că $MB = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, $AM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ și $AM + MB > AB$, deci $2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a$, sau $4\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) > a^2$, $4 - a^2 > a^2$, $2a^2 < 4$, $a < \sqrt{2}$.

Această condiție este și suficientă, ceea ce se poate arăta construind tetraedrul care verifică condițiile arătate. Se pot construi, de exemplu, patru triunghiuri cu laturile de lungimi 1, 1 și $a < \sqrt{2}$.

Acestea se unesc, așa cum se arată în fig. 38. Se obține tetraedrul cu muchiile $CD = AB = a$, $AC = AD = CB = BD = 1$.

Astfel, pentru $k = 2$ condiția necesară și suficientă va fi $0 < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

c) $k = 3$. În acest caz există trei moduri de distribuire a muchiilor în tetraedru.

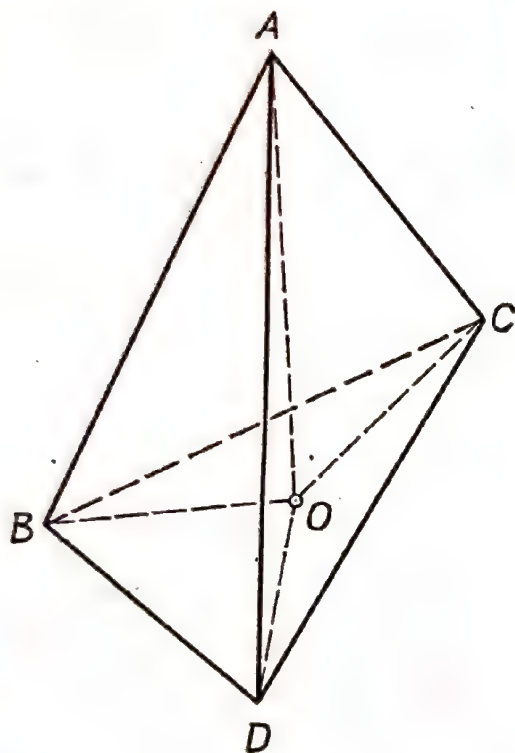


Fig. 39

1) Muchiile de lungime a au un vîrf comun, deci $AC = AB = AD = a$, iar $BC = BD = CD = 1$. Este necesar deci ca $AC > CO$, unde O este centrul triunghiului BCD (fig. 39). Condiția necesară și suficientă este, evident,

$$CO = R = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ și } a > R, a > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2) Muchiile de lungime a formează un triunghi. Fie $BC = CD = BD = a$, iar $AC = AB = AD = 1$ (fig. 39).

Analog cu cazul precedent se va obține

$$CO < AC, CO = R, a = R\sqrt{3},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, R < 1, \frac{a}{\sqrt{3}} < 1, a < \sqrt{3}.$$

Nu este necesar să se studieze cazul 3): $AB = CD = BC = a$, $AC = AD = DB = 1$, deoarece condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească a în cazurile 1) și 2) acopăr deja toată semiaxa pozitivă $\left(a > \frac{1}{\sqrt{3}}, a < \sqrt{3}\right)$, astfel încît în cazul $k=3$ tetraedrul există oricare ar fi $a > 0$.

d) Cazurile $k = 4$ și $k = 5$ se reduc ușor la cazul $k = 2$, respectiv la cazul $k = 1$. Într-adevăr, dacă se dă $k = 4$, micșorînd toate muchiile tetraedrului de a ori, se obțin patru muchii de lungime 1 și două muchii de lungime $\frac{1}{a}$. Se notează $\frac{1}{a} = b$ și ținînd seama de cazul b), condițiile necesare și suficiente se scriu astfel:

$$0 < b < \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \text{ adică } 0 < \frac{1}{a} < \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Rezultă $a > \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, ceea ce se mai scrie și $a > \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. În cazul $k = 5$, în aceleași condiții, se obțin cinci muchii de lungime 1 și o muchie de lungime $b = \frac{1}{a}$.

Plecînd de la cazul a), se găsește $b < \sqrt{3}$ și deci $\frac{1}{a} < \sqrt{3}$ sau, altfel scris,

$$a > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

66. Fie O_2 centrul semicercului γ_2 și $O_2H_2 \perp AB$ (fig. 40). Se presupune că punctul H_2 este situat între punctele B și D (celălalt caz poate fi studiat analog). Se alege raza semicercului γ drept unitate de lungime. Dacă se notează $AD = x$ și $O_2H_2 = r$, se obține $AH_2 = r + x$ iar $OO_2 = \sqrt{OH_2^2 + r^2} = \sqrt{(x + r - 1)^2 + r^2}$. Deoarece semicercurile γ și γ_2 sînt tangente, $OO_2 + O_2K = 1$, adică

$$\sqrt{(x + r - 1)^2 + r^2} = 1 - r, (x + r - 1)^2 = 1 - 2r$$

și se deduce că $AH_2^2 = (x + r)^2 = [(x + r - 1) + 1]^2 = 2x$. Pe de altă parte $AC^2 = AD \cdot AB = 2x = AH_2^2$, adică $AC = AH_2$.

Fie O_3 centrul semicercului γ_3 și $O_3H_3 \perp AB$. Analog se demonstrează că $BC = BH_3$. Fie O_1 mijlocul segmentului O_3O_2 , iar $O_1H_1 \perp AB$. Se va arăta că O_1 este centrul semicercului γ_1 . Întrucît O_1H_1 este linie mijlocie în trapezul $O_2H_2H_3O_3$, atunci $O_1H_1 = \frac{O_3H_3 + O_2H_2}{2}$.

Or O_3H_3 este raza semicercului γ_3 , iar CD este tangentă la acest semicerc. Distanța de la punctul O_3 la CD este dată de lungimea segmentului H_3D și este egală cu raza semicercului γ_3 , prin urmare, $O_3H_3 = H_3D$. Deoarece O_2H_2 este rază a semicercului γ_2 , iar CD este tangentă la acest semicerc, distanța de la punctul O_2 la

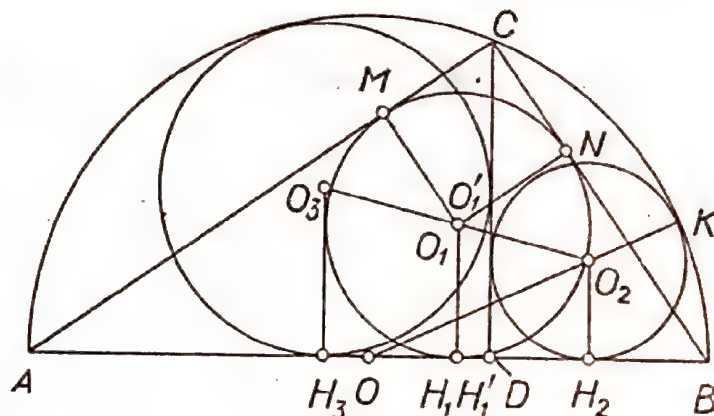


Fig. 40

CD va fi egală cu $H_2D = r$ și deci $O_2H_2 = H_2D$. Aceasta înseamnă că

$$\begin{aligned} O_1H_1 &= \frac{O_3H_3 + O_2H_2}{2} = \frac{H_3D + H_2D}{2} = \frac{H_3H_2}{2} = \\ &= \frac{AH_2 + BH_3 - AB}{2} = \frac{AC + BC - AB}{2}, \\ AH_1 &= \frac{AH_3 + AH_2}{2} = \frac{AH_2 + AB - BH_3}{2} = \frac{AC + AB - BC}{2}. \end{aligned}$$

Dacă se notează cu O'_1 centrul semicercului γ_1 , iar cu H'_1 , M și N punctele de tangență ale triunghiului ABC cu acest semicerc, atunci $O'_1H'_1 \perp AB$, $O'_1M \perp AC$, $O'_1N \perp BC$, iar

$$AH'_1 = \frac{AC + AB - BC}{2} = AH_1.$$

Deoarece $MC = CN$ și $BH'_1 = BN$ ca tangente la același cerc, duse din punctele C , respectiv B , se găsește că

$$\begin{aligned} AH'_1 + AM &= (AB - BH'_1) + (AC - MC) = AC + AB - \\ &- (MC + BH'_1) = AC + AB - (CN + BN) = \\ &= AC + AB - BC. \end{aligned}$$

Deoarece $O'_1H'_1 = O'_1M = CM = \frac{AC + BC - AB}{2} = O_1H_1$, înseamnă

că punctele O_1 și O'_1 coincid. S-a demonstrat, în acest fel, că punctele O_1 , O_2 și O_3 sînt situate pe aceeași dreaptă. Fiindcă dreapta simetrică a unei tangente la cerc față de o dreaptă care trece prin centrul cercului este la rîndul său tangentă la cerc, rezultă că dreapta simetrică cu AB față de dreapta $O_3O_1O_2$ este tangenta comună căutată.

67. Cîțiva concurenți au dat o evaluare mai bună pentru numărul patrulaterelor convexe decît cea care este cerută de enunțul problemei. Ei au arătat că numărul patrulaterelor convexe care au vîrfurile în cele n puncte date nu este mai mic decît $\frac{C_n^4}{n-4}$. În continuare este expusă una dintre rezolvările pentru care juriul a acordat premii speciale.

L e m ă. *Din cinci puncte date în plan, astfel ca oricare trei să nu fie situate pe aceeași dreaptă, se găsesc patru puncte care formează un patrulater convex.*

Demonstrația acestei leme poate fi găsită la problema 119 (fig. 41).

Se consideră toate grupele de cîte cinci puncte din cele n puncte date (grupe care există, deoarece $n > 4$). Se pot forma astfel C_n^5 grupe. În fiecare grupă există cel puțin patru puncte care sînt vîrfuri ale unui patrulater convex. Fiecare din aceste patrulatere va fi numărat însă de cîte $n - 4$ ori, deoarece dacă patru puncte sînt vîrfuri ale patrulaterului, cel de-al cincelea punct din grupă poate fi luat oricare din celelalte $n - 4$ puncte. Se găsește astfel că numărul patrulaterelelor convexe nu poate fi mai mic decît $\frac{C_n^5}{n - 4}$. Se va

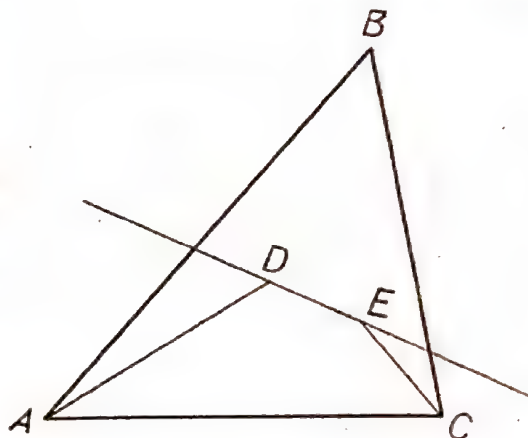


Fig. 41

arăta în continuare că $\frac{C_n^5}{n - 4} \geq C_{n-3}^2$. O succesiune de transformări echivalente va conduce la

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120(n-4)} \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2},$$

$$n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geq 0, \quad n^3 - 3n^2 - 58n + 240 \geq 0.$$

Polinomul din membrul întii al inegalității obținute are rădăcinile $n_1 = 5$, $n_2 = 6$ și $n_3 = -8$. Dacă inegalitatea se transcrie sub forma $(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0$, rezultă că pentru $n > 4$ aceasta constituie o egalitate numai dacă $n = 5$ sau dacă $n = 6$. În cazul cînd $n > 6$ este adevărată inegalitatea strictă $\frac{C_n^5}{n-4} > C_{n-3}^2$.

68. Se notează $x_1 y_1 - z_1^2 = D_1$, $x_2 y_2 - z_2^2 = D_2$, iar

$$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = D.$$

Se va demonstra că

$$\frac{D}{x_1 + x_2} \geq \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}.$$

Dacă se consideră polinoamele

$$P_1(t) = x_1 t^2 + 2z_1 t + y_1, \quad P_2(t) = x_2 t^2 + 2z_2 t + y_2,$$

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t),$$

se observă că $-D_1$, $-D_2$ și $-D$ sînt discriminanții acestor polinoame, iar coeficientul dominant al lui $P(t)$ este $x_1 + x_2$. Evident că

$$\min P_1(t) = \frac{D_1}{x_1}, \quad \min P_2(t) = \frac{D_2}{x_2}, \quad \min P(t) = \frac{D}{x_1 + x_2}$$

iar $\min P(t) \geq \min P_1(t) + \min P_2(t)$, ceea ce încheie demonstrația inegalității. Aceasta se va transforma în egalitate, dacă și numai dacă $\min P_1(t)$ și $\min P_2(t)$ vor fi atinse în același punct, adică dacă $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$. Deoarece $D_1 > 0$ și $D_2 > 0$, inegalitatea demonstrată arată

$$\text{că și } D > 0. \text{ Este adevărată deci inegalitatea } \frac{8}{D} \leq \frac{8}{(x_1 + x_2) \left(\frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2} \right)}.$$

$$\text{Mai trebuie demonstrat că } \frac{8}{(x_1 + x_2) \left(\frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2} \right)} \leq D_2^{-1} + D_1^{-1}, \text{ inegalitate care, deoarece numitorul membrului întii este pozitiv, se reduce la inegalitatea echivalentă}$$

$$(D_1^{-1} + D_2^{-1}) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1} D_1 + \frac{x_1 + x_2}{x_2} D_2 \right) \geq 8.$$

Membrul întii al inegalității se scrie succesiv :

$$\begin{aligned} & (D_1^{-1} + D_2^{-1}) \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1} D_1 + \frac{x_1 + x_2}{x_2} D_2 \right) = \\ &= \frac{x_1 + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_2}{x_2} + \frac{D_1}{D_2} + \frac{D_2}{D_1} + \frac{x_2}{x_1} \frac{D_1}{D_2} + \frac{x_1}{x_2} \frac{D_2}{D_1} = \\ &= 2 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) + \left(\frac{D_1}{D_2} + \frac{D_2}{D_1} \right) + \left(\frac{x_2}{x_1} \frac{D_1}{D_2} + \frac{x_1}{x_2} \frac{D_2}{D_1} \right) \geq 8, \end{aligned}$$

deoarece fiecare cantitate din paranteze nu este mai mică decât doi pe baza inegalității lui Cauchy.

Enunțul a fost astfel complet demonstrat. Egalitatea este adevărată dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $D_1 = D_2$. Inegalitatea inițială

devine egalitate atunci și numai atunci cînd sînt îndeplinite simultan condițiile

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2, \\ D_1 = D_2, \\ \frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}, \end{array} \right. \text{ ceea ce implică } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{array} \right.$$

69. L e m ă. Fie $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$, O centrul cercului înscris de rază r , iar O_1 centrul cercului exînscriș a cărui rază este ρ . În acest caz este îndeplinită relația (fig. 42)

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Demonstrație. Deoarece $\angle OBA = \frac{\beta}{2}$, $\angle OAB = \frac{\alpha}{2}$, iar $OA \perp O_1A$ și $OB \perp O_1B$, rezultă

$$AB = AN + NB = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Pe de altă parte,

$$AB = AK + KB = \rho \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \rho \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \rho \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right).$$

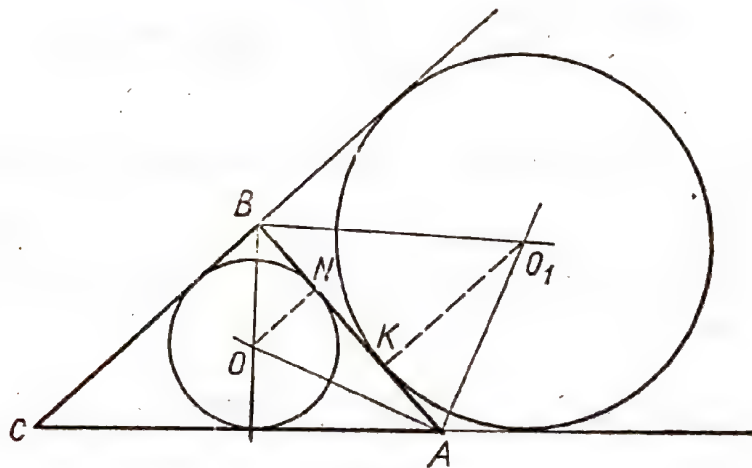


Fig. 42

Prin urmare,

$$\frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \rho \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right).$$

$k = n$ și $k = n - 1$, iar $x_k \geq 0$, cînd $k \leq n - 2$, rezultă din ultimele inegalități $\sum_{k=0}^n x_{n-k} \left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k} \right) < 0$, ceea ce înseamnă că

$$\sum_{k=0}^n \frac{x_{k-n}}{a^k} < \sum_{k=0}^n \frac{x_{n-k}}{b^k},$$

adică $\frac{\sum_{k=0}^n x_{n-k} a^{n-k}}{a^n} < \frac{\sum_{k=0}^n x_{n-k} b^{n-k}}{b^n}$, sau, altfel scris, $\frac{A_n}{a^n} < \frac{B_n}{b^n}$ și, prin urmare, $\frac{a^n}{A_n} > \frac{b^n}{B_n}$ sau $1 - \frac{x_n a^n}{A_n} < 1 - \frac{x_n b^n}{B_n}$, obținînd în cele din urmă $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$.

Dacă se presupune că $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$, parcurgînd aceleași raționamente în sens invers, se găsește $\sum_{k=0}^n x_{n-k} \left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k} \right) < 0$. Deoarece $x_{n-k} \geq 0$ ($x_n \neq 0$ și $x_{n-1} \neq 0$), inegalitatea este posibilă numai cînd $a > b$.

71. a) Prin ipoteză $a_k \geq 1$ iar $a_{k-1} \leq a_k$, ceea ce înseamnă că $1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \geq 0$, deci

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq 0.$$

Se demonstrează că $b_n < 2$:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k (2\sqrt{a_k})} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k (\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}} + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Dacă se ține seama de inegalitatea între media aritmetică și cea geometrică a două numere, se găsește

$$\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k} + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} \geq 2 \sqrt{\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}} = 2 \sqrt{\frac{1}{a_k}},$$

și, în consecință,

$$b_n \leq 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right) < 2.$$

b) Se demonstrează că șirul $a_n = q^n$ ($q > 1$) satisface condiția din enunț. Într-adevăr, $a_0 = 1$, $a_k > a_{k-1}$, deoarece $q > 1$. Termenul b_n se transformă în modul următor, folosind formula care dă suma primilor n termeni dintr-o progresie geometrică:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{q^{k-1}}{q^k} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q^k}} = \left(1 - \frac{1}{q} \right) \frac{\frac{1}{\sqrt{q}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q^n}} \right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{q}}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}} \right) \frac{1}{\sqrt{q}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q^n}} \right) = \frac{\sqrt{q} + 1}{q} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q^n}} \right). \end{aligned}$$

Conform enunțului, $c < 2$, din care cauză există un număr M , astfel încît $c < M < 2$ (de exemplu, $M = \frac{c+2}{2}$). Dacă se alege

q astfel încît să verifice egalitatea $\frac{\sqrt{q} + 1}{q} = M$, adică luîndu-se

$\sqrt{q} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2M}$, se constată ușor că în cazul $0 < M < 2$,

avem $\frac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2M} > 1$, adică $\sqrt{q} > 1$ și deci $q > 1$.

Se va arăta că pentru q astfel ales există un număr natural N cu proprietatea că $b_n > c$, dacă $n > N$. Dacă se pune b_n sub forma

$$b_n = \frac{\sqrt{q} + 1}{q} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q^n}} \right) = M \left(1 - \frac{1}{\sqrt{q^n}} \right), \quad M > c > 0,$$

inegalitatea $b_n > c$ se scrie în mod echivalent

$$q^n > \frac{M^2}{(M - c)^2},$$

găsind astfel că $n > \log_a \frac{M^2}{(M-c)^2}$, inegalitate care atrage după sine

$$N = \left\lceil \log_a \frac{M^2}{(M-c)^2} \right\rceil.$$

72. Cel puțin unul din șase numere naturale consecutive se divide la 5. Dacă aceste numere au proprietatea din enunț, rezultă că două din acestea se divid la 5 și anume n și $n + 5$.

Se arată că produsul a două din aceste numere este mai mare decât fiecare din celelalte. Este suficient, pentru aceasta, ca $n(n+1) > n+5$. Într-adevăr, diferența $n(n+1) - (n+5) = n^2 - 5$ este totdeauna pozitivă când $n \geq 5$, prin urmare $n(n+1) > n+5$. Rezultă astfel că în fiecare produs intră trei și numai trei factori. În acest caz există șase posibilități de a grupa cele șase numere în două produse, ținând seama că numărul cel mai mic n și numărul cel mai mare $n+5$ din acestea fac parte din produse diferite (deoarece sînt divizibile la 5):

- 1) $n(n+1)(n+2)$ și $(n+3)(n+4)(n+5)$,
- 2) $n(n+1)(n+3)$ și $(n+2)(n+4)(n+5)$,
- 3) $n(n+1)(n+4)$ și $(n+2)(n+3)(n+5)$,
- 4) $n(n+2)(n+3)$ și $(n+1)(n+4)(n+5)$,
- 5) $n(n+2)(n+4)$ și $(n+1)(n+3)(n+5)$,
- 6) $n(n+3)(n+4)$ și $(n+1)(n+2)(n+5)$.

Primele cinci cazuri nu sînt posibile, deoarece fiecare din factorii primului produs sînt mai mici decât factorul corespunzător din cel de-al doilea produs și deci în fiecare din aceste cinci cazuri primul din produse este mai mic decât cel de-al doilea produs.

În cel de-al șaselea caz, $n(n+3)(n+4) = (n+1)(n+2)(n+5)$, adică $n^2 + 5n + 10 = 0$. Întrucît ecuația în n obținută nu are rădăcini pozitive, nu este posibil nici acest caz. Rezultă astfel că propoziția din enunț nu este satisfăcătoare pentru nici un număr întreg pozitiv.

73. Se demonstrează că muchiile opuse (de exemplu, BC și AD) sînt perpendiculare în tetraedrul dat. Muchia BC este perpendiculară pe planul AED , deoarece $AE \perp BC$, $DE \perp BC$ și, prin urmare, $BC \perp AD$ (fig. 44).

În continuare se demonstrează că unghiurile plane cu vîrfurile în punctul D sînt drepte. $DB \perp DC$ conform enunțului, iar $DC \perp AB$

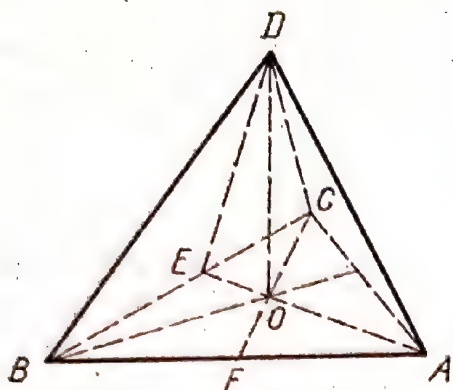


Fig. 44

deoarece sînt muchii opuse în tetraedru; DC este deci perpendiculară pe planul ABD și, prin urmare, $DC \perp AD$. În mod analog se demonstrează că $AD \perp DB$.

Dacă în inegalitatea inițială se exprimă membrul al doilea prin AB , BC și AC :

$$AD^2 + BD^2 = AB^2, \quad AD^2 + CD^2 = AC^2$$

$$\text{și } BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

se găsește

$$(AB + BC + AC)^2 \leq 3(AB^2 + AC^2 + BC^2),$$

ceea ce se scrie sub forma

$$\begin{aligned} & \frac{AB^2 + BC^2}{2} - AB \cdot BC + \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \\ & - AB \cdot AC + \frac{BC^2 + AC^2}{2} - BC \cdot AC \geq 0, \end{aligned}$$

condiție care este evident îndeplinită, deoarece $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$.

Inegalitatea se transformă în egalitate cînd $AB = BC = CA$.

74. Lemă. Dacă se dau în plan cinci puncte, oricare trei din acestea nefiind situate pe aceeași dreaptă, se pot găsi cel puțin trei triunghiuri dreptunghice sau obtuzunghice avînd vîrfurile în aceste puncte.

Dacă înfășurătoarea convexă a acestor puncte este un triunghi, în interiorul acestuia vor fi situate două din cele cinci puncte, fie acestea punctele D și E (fig. 45), fiecare fiind vîrf pentru trei triunghiuri din care cel puțin două nu sînt ascuțitunghice. În consecință, în acest caz se găsesc cel puțin patru triunghiuri care nu sînt ascuțitunghice.

Dacă înfășurătoarea convexă a celor cinci puncte este un patrulater convex (fig. 46), cel puțin unul din triunghiurile avînd un vîrf în aceste puncte este neascuțitunghic. Unul din cele cinci puncte, de exemplu E , este situat în interiorul patrulaterului și deci în interiorul unuia din triunghiuri (nu este posibil ca E să fie situat pe o diagonală, deoarece, prin ipoteză, nu există trei puncte situate pe aceeași dreaptă). Fie ABC triunghiul în interiorul căruia se găsește

punctul E . Cel puțin două din triunghiurile ABE , BEC și AEC vor fi neascuțitunghice. Prin urmare, în acest caz se vor găsi cel puțin trei triunghiuri neascuțitunghice.

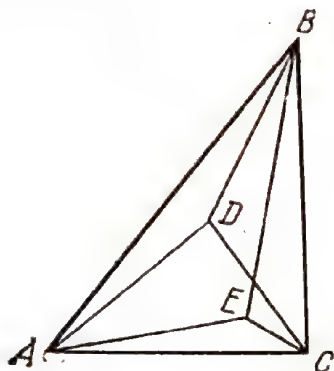


Fig. 45

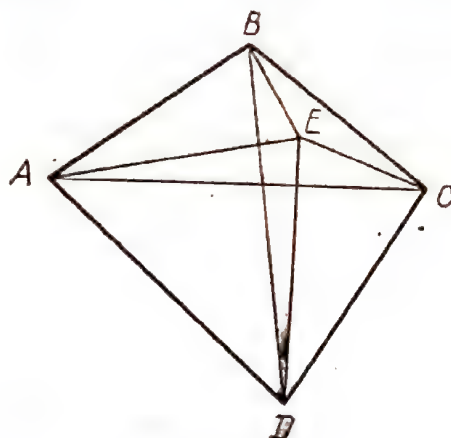


Fig. 46

Se consideră, în fine, cazul cînd înfășurătoarea convexă a celor cinci puncte este un pentagon convex. Suma unghiurilor într-un pentagon convex este de $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$, deci cel puțin două unghiuri ale pentagonului nu sînt ascuțite.

Dacă vîrfurile a două unghiuri neascuțite formează o latură a pentagonului (fie aceasta AB), se consideră patrulaterul $BCDE$ (fig. 47), care are cel puțin unul din unghiuri neascuțit. În acest caz se vor găsi cel puțin trei triunghiuri neascuțitunghice.

Dacă vîrfurile unghiurilor neascuțite A și C nu formează o latură a pentagonului (fig. 48), se consideră patrulaterul $ACDE$, care are cel puțin un unghi neascuțit, găsindu-se și de această dată cel puțin trei triunghiuri neascuțitunghice, lema fiind astfel complet demonstrată.

Din cele 100 puncte, se pot forma, conform lemei, un număr de $3 \cdot C_{100}^5$ triunghiuri neascuțitunghice. Unul și același triunghi poate avea vîrfurile în grupe diferite de cîte cinci puncte, în general

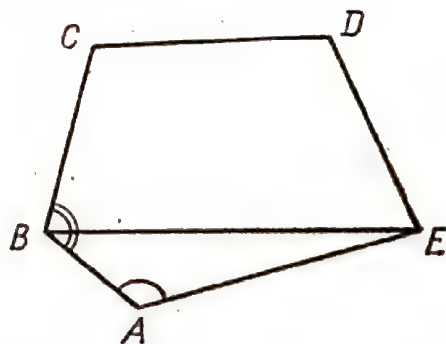


Fig. 47

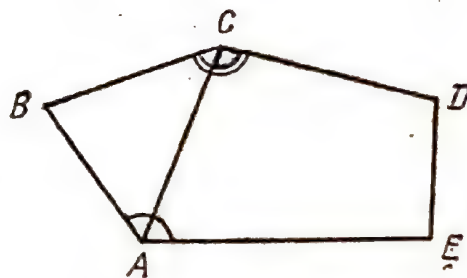


Fig. 48

fiind posibilă apartenența sa la C_{97}^2 astfel de grupe. În acest mod se pot găsi cel puțin $\frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2}$ triunghiuri neascuțitunghice din totalul de C_{100}^3 triunghiuri, ceea ce înseamnă că numărul triunghiurilor ascuțitunghice va fi cel mult $C_{100}^3 - \frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2}$. Calculând raportul dintre numărul acestora și numărul total de triunghiuri, se obține

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{100}^3} \left(C_{100}^3 - \frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2} \right) &= 1 - \frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2 C_{100}^3} = \\ &= 1 - \frac{3 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 98} = 1 - \frac{3}{10} = 0,7, \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

75. Se demonstrează că afirmația este adevărată pentru $n = 3$. Membrul întâi al inegalității devine

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) &= \\ &= a_1^2 - a_1a_3 - a_1a_2 + a_2a_3 + a_2^2 - a_2a_3 - a_1a_2 + a_1a_3 + \\ &+ a_3^2 - a_2a_3 - a_1a_3 + a_1a_2 = a_1^2 - a_1a_3 - a_1a_2 + a_2^2 - \\ &- a_2a_3 + a_3^2 = \frac{1}{2} [(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2]. \end{aligned}$$

Expresia obținută este nenegativă, oricare ar fi numerele a_1, a_2, a_3 . Afirmația este deci adevărată în cazul $n = 3$.

Dacă $n = 5$, se procedează în modul următor. Deoarece membrul întâi al inegalității este simetric în a_i și a_j ($i \neq j$), este posibil, fără a restrînge generalitatea, să se considere că $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$. În acest caz

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 \geq 0, \quad a_1 - a_3 \geq a_2 - a_3 \geq 0, \quad a_1 - a_4 \geq a_2 - a_4 \geq 0, \\ a_1 - a_5 \geq a_2 - a_5 \geq 0, \end{aligned}$$

deci

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5) \geq 0.$$

Analog

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) + \\ + (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geq 0.$$

În fine, $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) \geq 0$, fiind un produs de doi factori nepozitivi și doi factori nenegativi, ceea ce arată valabilitatea întregii inegalități pentru $n = 5$.

Faptul că inegalitatea nu este adevărată pentru alte valori ale lui $n > 2$ se arată construind exemple. Pentru $n = 4$ un astfel de exemplu îl constituie numerele $a_1 = 0$ și $a_2 = a_3 = a_4 = 1$, iar pentru $n > 5$ exemplul este dat de numerele $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-4} = 0$ și $a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$.

76. Se notează cu P poliedrul obținut din P_1 cu ajutorul unei omotetii de centru A_1 și având raportul 2. Se observă ușor că toate poliedrele P_1, P_2, \dots, P_9 sînt incluse în P . Fie, de exemplu, $X \in P_2$. Există atunci punctul $Y \in P_1$, astfel ca X să fie transformatul lui Y în translația care duce A_1 în A_2 . Considerînd paralelogramul A_1A_2XY (fig. 49), se constată că punctul Z de intersecție al diagonalelor sale aparține lui P_1 , deoarece $A_2 \in P_1$, $Y \in P_1$, iar P_1 este poliedru convex. Punctul X se obține însă din punctul Z printr-o omotetie de centru A_1 și raport 2, ceea ce înseamnă că $X \in P$.

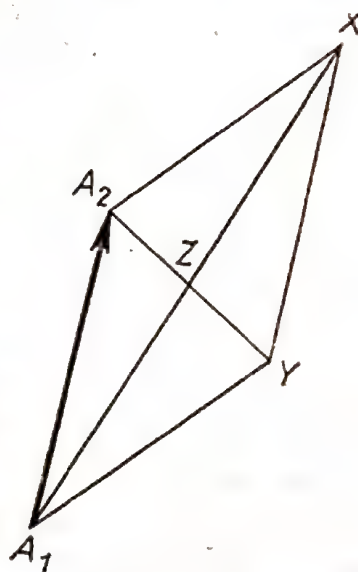


Fig. 49

În acest mod, poliedrul P , al cărui volum $V(P)$ este de opt ori mai mare decât volumul $V(P_1)$ al poliedrului P_1 , include cele nouă poliedre care au fiecare volumul $V(P_1)$. Deci cel puțin două din poliedrele acestea au în comun un punct interior, ceea ce trebuia demonstrat.

77. Demonstrația afirmației din enunț se face din aproape în aproape.

Fie k numere

$$a_1 = 2^{n_1} - 3, a_2 = 2^{n_2} - 3, \dots, a_k = 2^{n_k} - 3,$$

relativ prime între ele două câte două, iar $2 = n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Se construiește numărul $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$, relativ prim cu fiecare din aceste numere. Fie $l = a_1 a_2 \dots a_k$. Printre cele $l + 1$ numere $2^0, 2^1, \dots, 2^l$ se găsesc cel puțin două care împărțite la l dau ace-

lași rest. Fie aceste numere 2^r și 2^s ($r > s$). Se poate găsi atunci numărul natural p astfel ca $pl = 2^r - 2^s = (2^{r-s} - 1)2^s$. Deoarece l este impar, rezultă că $2^{r-s} - 1$ se divide la l , adică se găsește q așa ca $2^{r-s} - 1 = ql$. În acest caz $2^{r-s+2} - 3 = 4 \cdot 2^{r-s} - 3 = 4(lq + 1) - 3 = 4ql + 1$, număr care se ia drept a_{k+1} , deoarece nu are, evident, divizori comuni cu l , deci cu nici unul din numerele a_1, a_2, \dots, a_k , iar $a_{k+1} > a_k$. Se pot construi astfel oricâte numere cu proprietatea cerută.

78. a) Prin reducere la absurd, se presupune că există linia poligonală minimă $XYZTX$ (fig. 50). Fețele ABC și BCD se desfășoară

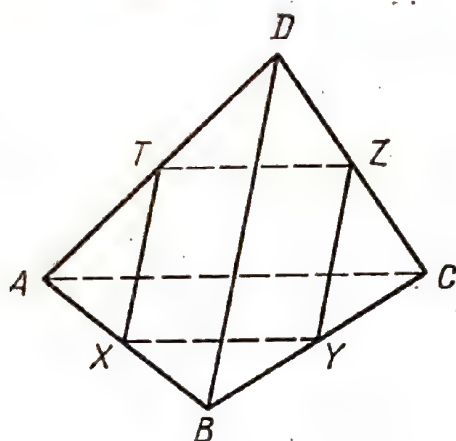


Fig. 50

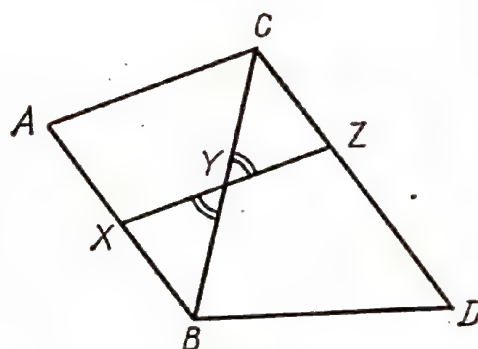


Fig. 51

șoară în același plan, obținându-se patrulaterul convex $ABDC$ (fig. 51). Din faptul că linia poligonală are lungimea minimă, rezultă că $\angle XYB = \angle ZYC$, întrucât în caz contrar se poate obține o lungime mai mică prin deplasarea punctului Y . Raționamente analoge arată că

$$\angle YZC = \angle TZD, \angle ZTD = \angle XTA, \angle TXA = \angle YXB.$$

Se constată, în acest mod, că

$$\begin{aligned} \angle DAB + \angle BCD &= 180^\circ - \angle TXA - \angle XTA + 180^\circ - \\ &- \angle YZC - \angle ZYC = 180^\circ - \angle YXB - \angle XYB + 180^\circ - \\ &- \angle ZTD - \angle TZD = \angle ABC + \angle ADC, \end{aligned}$$

ceea ce contrazice condiția impusă de enunț pentru punctul a).

b) Se consideră cazul

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC. \quad (1)$$

Unghiul α care este dat în enunțul problemei este suma tuturor unghiurilor plane care au vârful în punctul A . În mod analog se va

nota cu β , γ , respectiv cu δ suma unghiurilor plane care au vârful în punctele B , C , D .

Deoarece $\angle BAD + \angle BAC + \angle CAD = \alpha$ și $\angle ACB + \angle ACD + \angle BCD = \gamma$, se deduce, luând în considerație relația (1), că

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \angle BAD + \angle BAC + \angle CAD + \\ &+ \angle ACB + \angle ACD + \angle BCD = \angle ABC + \\ &+ \angle ADC + \angle BAC + \angle CAD + \angle ACB + \\ &+ \angle ACD = (\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB) + \\ &+ (\angle ADC + \angle CAD + \angle ACD) = 360^\circ, \end{aligned}$$

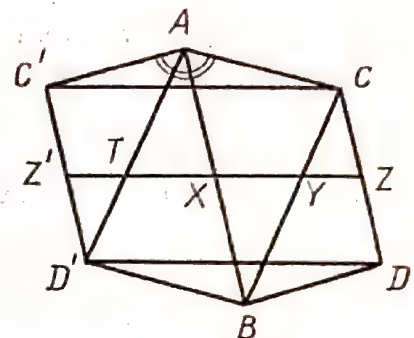


Fig. 52

adică $\alpha + \gamma = 360^\circ$. În mod analog se găsește că $\beta + \delta = 360^\circ$. Rezultă astfel că cel puțin unul din unghiurile α și γ și cel puțin unul din unghiurile β și δ nu depășește 180° . Fie α și β aceste unghiuri. Se taie tetraedrul $ABCD$ de-a lungul muchiilor AC , CD și DB și se desfășoară (dacă unghiurile care nu depășesc 180° ar fi altele, tetraedrul ar fi fost tăiat de-a lungul altor muchii astfel ca linia poligonală care descrie tăietura să aibă extremitățile în vîrfurile acestor unghiuri). Se obține desfășurarea $AC'D'BDC$ (fig. 52) compusă din triunghiurile $AC'D'$, ABD' , ABC și BCD . Din egalitatea (1) se găsește că segmentele CD și $C'D'$ sînt paralele și la fel orientate, deci $CDD'C'$ este paralelogram și, considerînd triunghiul isoscel ACC' , rezultă că $CC' = 2AC \sin \frac{\alpha}{2}$. Întrucît s-a făcut presupunerea

că unghiurile α și β nu depășesc 180° , înseamnă că paralelogramul $CDD'C'$ este inclus în întregime în figura $AC'D'BDC$ și fiecărui segment ZZ' paralel cu segmentul CC' de aceeași lungime îi corespunde linia poligonală $XYZTX$ de lungime minimă.

79. Mulțimea căutată de puncte va fi construită prin inducție. Pentru $m = 1$ o astfel de mulțime este constituită din două puncte situate unul față de celălalt la o distanță egală cu 1.

Se consideră că a fost construită o astfel de mulțime de puncte în cazul cînd $m = k$, fie aceasta S_k . Cu ajutorul lui S_k se va construi mulțimea care corespunde cazului $m = k + 1$. Este evident că problema va fi rezolvată dacă se găsește o translație de vector unitate a lui S_k astfel încît mulțimea S'_k obținută ca rezultat al acestei translații să nu aibă puncte comune cu S_k și oricare punct al lui S'_k să se găsească la distanța 1 față de un singur punct al mulțimii

S_k și anume față de cel din care a provenit prin translație. Mulțimea căutată S_{k+1} va fi atunci reuniunea mulțimilor S_k și S'_k . Se arată că există o astfel de translație. Se construiesc toate cercurile având lungimea razei egală cu 1 iar centrele în punctele mulțimii S_k . Fiecare cerc care are centrul într-un punct $X \in S_k$ are un număr finit de puncte de intersecție cu celelalte cercuri. Se consideră mulțimea vectorilor care au originea în punctul X iar vîrfurile în punctele de intersecție considerate mai sus sau în alte puncte ale mulțimii S_k situate la o distanță egală cu 1 față de punctul X . Pentru fiecare punct al mulțimii S_k se formează cite o astfel de mulțime de vectori. Este evident că reuniunea tuturor acestor mulțimi de vectori va fi o mulțime finită, ceea ce înseamnă că se poate găsi un vector unitate neparalel cu nici un vector din această mulțime. Este ușor de arătat, în continuare, că un astfel de vector determină translația căutată.

80. Se consideră sumele elementelor din fiecare linie și sumele elementelor din fiecare coloană. Fie p valoarea cea mai mică pe care o iau aceste sume. Dacă $p \geq n$, afirmația din enunț este evidentă. Se va considera deci cazul $p < n$. Întrucît schimbarea între ele a două linii sau a două coloane nu modifică sumele considerate, se va presupune că suma elementelor din prima linie este egală cu p și că în această linie pe primele locuri se găsesc elementele care sînt nule, iar pe următoarele elementele nenule. Deoarece $p < n$, în prima linie nu se pot afla mai puțin de $n - p$ zerouri. Se poate deduce, pe baza inegalității date în enunț, că suma elementelor pe fiecare din primele $n - p$ coloane nu este mai mică decît $n - p$, iar suma tuturor elementelor din aceste coloane nu este mai mică decît $(n - p)^2$. Suma tuturor elementelor din ultimele p coloane nu este mai mică decît p^2 . Suma S a tuturor elementelor tabloului satisface deci inegalitatea

$$S_n \geq (n - p)^2 + p^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(n - 2p)^2}{2} \geq \frac{n^2}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

81. Se observă mai întii că nu este esențială condiția ca grupele să fie disjuncte, deoarece dacă se găsesc două grupe nedisjuncte de numere a căror sumă este aceeași, atunci, lăsînd la o parte elementele comune lor, se obțin două grupe disjuncte cu sume egale.

Se calculează, în continuare, numărul grupelor diferite care se pot forma cu cele zece numere. Fiecare dintre acestea poate aparține sau nu unei grupe, de aceea se pot forma astfel 2^{10} grupe distincte, printre care a fost numărată și grupa care nu conține nici un număr.

Excluzînd această grupă, numărul grupelor diferite va fi $2^{10} - 1 = 1\,023$. Întrucît fiecare număr din grupă nu depăşeşte 99, iar numerele ce formează o grupă nu sînt mai multe decît 10, suma numerelor din fiecare grupă nu depăşeşte $99 \cdot 10 = 990$, adică nu există mai mult de 990 sume distincte. Se deduce astfel că printre cele 1 023 grupe există şi unele pentru care sumele numerelor care le formează coincid.

82. Fie \hat{A} cel mai mic unghi al patrulaterului $ABCD$. Din punctul A se duce o semidreaptă situată în interiorul unghiului BAD , iar pe aceasta se ia punctul A_1 aflat suficient de aproape de punctul A , astfel ca dreptele care trec prin punctul A_1 şi sînt paralele cu laturile AB , respectiv cu AD să intersecteze laturile BC şi CD în punctele B_1 , respectiv D_1 (fig. 53) iar pe laturile AB şi AD să se găsească punctele L , respectiv K , în așa fel ca $\sphericalangle A_1LB = \sphericalangle ABC$, iar $\sphericalangle A_1KD = \sphericalangle CDA$. Dacă unul din unghiurile B sau D este obtuz (\hat{B} , în figură), ultima egalitate este posibilă pe baza apropierii suficiente a punctului A_1 de A .

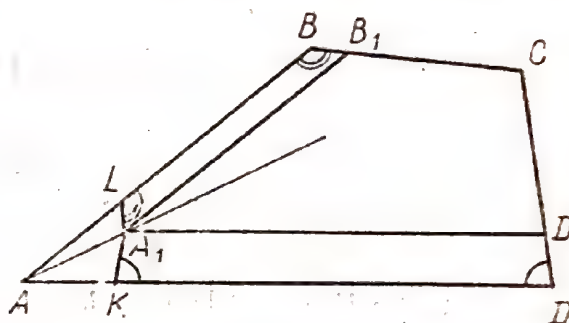


Fig. 53

În cazul unui unghi ascuțit (pe figură, D) aceasta este posibil deoarece A este cel mai mic. Trapezele isoscele A_1LBB_1 și A_1KDD_1 sînt inscriptibile. Unghiurile patrulaterului $A_1B_1CD_1$ sînt respectiv egale cu unghiurile patrulaterului inițial, de aceea patrulaterul $A_1B_1CD_1$ este de asemenea inscriptibil. În sfîrșit, patrulaterul ALA_1K este de asemenea inscriptibil, deoarece $\sphericalangle ALA_1 + \sphericalangle AK A_1 = (180^\circ - \hat{B}) + (180^\circ - D) = 180^\circ$.

Astfel, afirmația din enunț a fost demonstrată pentru $n = 4$. Întrucît în descompunerea obținută intră un trapez isoscel care se poate la rîndul său descompune într-un număr arbitrar de trapeze isoscele, rezultă adevărul afirmației din enunț pentru orice $n > 4$.

83. Se arată că puterea cea mai mare a unui număr prim p , la care se divide numărătorul fracției date nu este mai mică decît puterea cea mai mare a aceluiași număr prim p la care se divide numitorul fracției date, fapt care arată că fracția reprezintă un număr întreg.

L e m a I. Fie numărul prim p și numerele naturale n și k astfel ca $p^{k+1} > n$. Numărul p intră în acest caz în descompunerea lui

$n!$ în factori primi la puterea dată de exponentul $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$, prin $[a]$ înțelegînd partea întreagă a numărului a .

Demonstrația acestei leme este propusă cititorului.

L e m a II (exprimînd o proprietate a numerelor întregi). Fie două numere nenegative a și b . Acestea satisfac inegalitatea

$$[2a] + [2b] \geq [a] + [b] + [a + b].$$

Fie $a = [a] + \alpha$ și $b = [b] + \beta$, α și β satisfăcînd condițiile $0 \leq \alpha < 1$ și $0 \leq \beta < 1$.

Dacă $\alpha + \beta < 1$, $[a + b] = [a] + [b]$ și în consecință $[2a] + [2b] \geq 2[a] + 2[b] = [a] + [b] + [a + b]$.

În cazul în care $\alpha + \beta \geq 1$, sau $2\alpha \geq 1$, sau $2\beta \geq 1$.

Fie, de exemplu, $2\alpha \geq 1$ (cazul $2\beta \geq 1$ se studiază analog). Atunci $[a + b] = [a] + [b] + 1$ și $[2a] = 2[a] + 1$. De aceea $[2a] + [2b] \geq 2[a] + 1 + 2[b] = [a] + [b] + [a + b]$, ceea ce încheie demonstrarea lemei II.

Se consideră, în continuare, un număr prim p oarecare și k suficient de mare pentru ca $p^{k+1} > 2n$ și $p^{k+1} > 2m$. Rezultă că $p^{k+1} > m + n$. Aplicînd lema I, se obține că numărul p este factor al numărătorului fracției date, avînd exponentul

$$s = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{2n}{p^k}\right] + \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{2m}{p^k}\right],$$

fiind în același timp și factor al numitorului aceleiași fracții, avînd exponentul

$$t = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \dots + \left[\frac{m+n}{p^k}\right].$$

Aplicînd, în continuare, lema II numerelor $a = \frac{m}{p^i}$ și $b = \frac{n}{p^i}$, se obține

$$\left[\frac{2m}{p^i} \right] + \left[\frac{2n}{p^i} \right] \geq \left[\frac{m}{p^i} \right] + \left[\frac{n}{p^i} \right] + \left[\frac{m+n}{p^i} \right].$$

Adunînd toate aceste inegalități pentru $i = 1, 2, 3, \dots, k$, se obține că $s \geq t$, deci numărătorul fracției din enunț este divizibil cu numitorul acelei fracții.

84. Este evident că

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a \quad (1)$$

este soluție a sistemului dat pentru orice număr real a . Se va arăta că nu există alte soluții ale acestui sistem. Fie numerele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , care satisfac sistemul dat. Din cauză că sistemul dat este invariant la o permutare ciclică a variabilelor x_k , se poate considera, fără a restrînge generalitatea, că x_1 este cel mai mare din cele cinci numere x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , adică $x_1 \geq x_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Evident că, în această situație, $x_1^2 - x_3x_5 \geq 0$ și $x_2^2 - x_4x_5 \geq 0$. Folosind prima și cea de-a cincea inegalitate, se obține $x_2^2 - x_3x_5 \leq 0$ și $x_3^2 - x_2x_4 \leq 0$, ceea ce arată că dacă numerele x_2, x_3, x_4, x_5 nu sînt toate egale între ele, nici x_2 și nici x_5 nu pot fi cele mai mari dintre acestea. Înseamnă că cele mai mari dintre numerele x_2, x_3, x_4, x_5 pot fi numai x_3 sau x_4 . Se verifică ușor însă că sistemul dat de inegalități este invariant față de permutarea lui x_3 cu x_4 simultan cu permutarea lui x_2 cu x_5 . Se poate considera, din această cauză, că x_3 este cel mai mare dintre numerele x_2, x_3, x_4, x_5 . Astfel, $x_1 \geq x_3 \geq x_i$, $i = 2, 4, 5$. Se obține atunci că $x_1x_3 \geq x_4^2$ și $x_1x_3 \geq x_5^2$ și, ținînd seama de cea de-a patra inegalitate, se obține $(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) = 0$. Rezultă că sau $x_1x_3 = x_4^2$ sau $x_1x_3 = x_5^2$. Avînd în vedere cea de-a treia inegalitate, se găsește că sau $x_1 = x_3 = x_4$, sau $x_1 = x_3 = x_5$. În primul caz dacă cel puțin unul din numerele x_2 și x_5 este strict mai mic decît $x_1 = x_3 = x_4$, este contrazisă cea de-a treia inegalitate. În consecință în acest caz, cele cinci numere trebuie să fie egale între ele. În al doilea caz numărul x_5 este cel mai mare printre numerele x_2, x_3, x_4, x_5 , ceea ce, așa cum s-a observat, este posibil numai dacă aceste patru numere sînt egale. Dar $x_1 = x_3$, deci cele cinci numere sînt egale între ele. În toate aceste situații este adevărată relația (1), deci sistemul dat nu admite decît soluții de această formă.

85. Demonstrația se face prin reducere la absurd, presupunându-se că într-un punct oarecare y_0 , $|g(y_0)| = a > 1$. Se alege punctul x_0 astfel ca $f(x_0) \neq 0$ și se definește prin recurență șirul $\{x_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) în modul următor:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y_0, & \text{dacă } |f(x_k + y_0)| \geq |f(x_k - y_0)|, \\ x_k - y_0, & \text{dacă } |f(x_k + y_0)| < |f(x_k - y_0)|. \end{cases}$$

Folosind ecuația dată de enunțul problemei, se obține

$$2|f(x_{k+1})| \geq |f(x_k + y_0)| + |f(x_k - y_0)| \geq |f(x_k + y_0)| + |f(x_k - y_0)| = 2|f(x_k)| \cdot |g(y_0)| = 2a|f(x_k)|.$$

Astfel, $|f(x_{k+1})| \geq a|f(x_k)|$, $a > 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. În acest mod se obține că $|f(x_k)| \geq a^k \cdot |f(x_0)|$. Deoarece $f(x_0) \neq 0$ și $a > 1$, se poate găsi un astfel de număr natural k , pentru care $a^k |f(x_0)| > 1$ și deci $|f(x_k)| > 1$, ceea ce contrazice ipoteza. Contradicția obținută arată că $|g(y)| \leq 1$ pentru orice y .

86. Se formulează mai întâi următoarea afirmație.

L e m ă. Dacă într-un plan sînt date trei drepte paralele diferite, se poate construi un triunghi echilateral ale cărui vîrfuri sînt situate cîte unul pe fiecare din cele trei drepte.

Demonstrarea lemei este propusă cititorului.

Se observă în continuare că lungimea laturii triunghiului echilateral construit în condițiile lemei nu depinde de modul în care este construit și este determinată unic de distanțele dintre cele trei drepte paralele. Se poate trece, mai departe, la abordarea problemei di enunț.

Fie P_0 , P_1 , P_2 și P_3 planele paralele date, presupunînd, fără a restrînge generalitatea, că planele P_1 , P_2 și P_3 sînt situate de o aceeași parte a planului P_0 , iar distanțele de la acestea la planul P_0 sînt respectiv ρ_1 , ρ_2 și ρ_3 ($0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$).

Fie planul arbitrar Q_α , care formează unghiul diedru α ($\alpha \neq 0$) cu planul P_0 . Lema demonstrată este aplicabilă dreptelor paralele l_0^α , l_1^α , l_2^α , care sînt intersecțiile planului Q_α cu planele P_0 , P_1 și P_2 . Se constată că distanțele de la dreapta l_0^α la dreptele l_1^α și l_2^α sînt

respectiv $\frac{\rho_1}{\sin \alpha}$ și $\frac{\rho_2}{\sin \alpha}$. Triunghiul echilateral care se constru-

iește conform lemei se notează prin $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ ($A_\alpha \in P_0$, $B_\alpha \in P_1$, $C_\alpha \in P_2$) și are lungimea laturii a_α . Dacă planul Q_α este transformat printr-o omotetie de centru A_α și raport $k = \sin \alpha$, transformatul

triunghiului $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ va avea latura de lungime $a_\alpha \sin \alpha$, iar vîrfurile situate pe trei drepte paralele, astfel încît două din aceste drepte se află la distanţele ρ_1 şi ρ_2 respectiv faţă de cea de-a treia. Lungimea laturii acestui triunghi este unic determinată de ρ_1 şi ρ_2 şi se poate exprima uşor în funcţie de acestea. Pentru rezolvarea problemei este însă suficient să se observe că această lungime este constantă pentru o poziţie dată a planelor paralele considerate. Dacă se notează această lungime cu a , atunci $a_\alpha \sin \alpha = a$ şi deci

$$a_\alpha = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

În continuare va fi calculată distanţa de la centrul O_α al triunghiului $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ la planul P_0 . Considerînd planul care trece prin dreapta $B_\alpha C_\alpha$ şi este perpendicular pe planul P_0 , se observă că distanţa de la mijlocul E_α al laturii $B_\alpha C_\alpha$ la planul P_0 este $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$.

De aceea, ducînd prin dreapta $A_\alpha E_\alpha$ planul perpendicular pe P_0 şi ţinînd seama de faptul că $A_\alpha O_\alpha = \frac{2}{3} A_\alpha E_\alpha$, se găseşte că distanţa

de la punctul O_α la planul P_0 este $\frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{3}$, fiind deci

independentă de unghiul α . În acest mod, centrele tuturor triunghiurilor echilaterale cu vîrfurile în planele P_0, P_1, P_2 sînt situate în acelaşi plan S , aflat la o distanţă fixă h de planul P_0 şi deci şi de planul P_3 .

Se construieşte apoi tetraedrul regulat $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, avînd $\Delta A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ ca bază, iar drept punct D_α se alege din cele două poziţii posibile ale acestuia pe cea care este mai îndepărtată de planul P_0 .

Înălţimea $D_\alpha O_\alpha$ a acestui tetraedru este egală cu $\sqrt{\frac{2}{3}} a_\alpha$, după cum arată un calcul simplu. Prin $D_\alpha O_\alpha$ se duce planul perpendicular pe planul P_0 . Dacă se notează cu p_0, p_1, p_2, p_3 şi s dreptele după care acest plan intersectează planele P_0, P_1, P_2, P_3 şi S (fig. 54), rezultă că punctul D_α este situat faţă de planul S la o distanţă egală cu

$$\left| \sqrt{\frac{2}{3}} a_\alpha \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} a \operatorname{ctg} \alpha. \right|$$

Pentru ca vîrfurile D_α al tetraedrului $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ să fie situat în planul P_3 , condiţia necesară şi suficientă este, evident, ca distanţa

astfel găsită să fie egală cu h , adică $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h}{a}$. Întrucît se poate determina unghiul α în așa fel ca această egalitate să fie satisfăcută, înseamnă că este asigurată existența unui astfel de tetraedru. Mai mult, formula obținută permite construcția concretă a unui astfel de tetraedru cînd este dată poziția celor patru plane paralele.

87. Rezolvarea I. Demonstrația poate fi făcută cu ajutorul inducției complete. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Se presupune că inegalitatea este satisfăcută pentru $n = k$ arbitrar și se va demonstra că este satisfăcută și pentru $n = k + 2$ (deoarece n este un număr impar înseamnă că numerele k și $k + 2$ sînt consecutive în șirul valorilor lui n).

Se orientează dreapta l și se renumerează vectorii dați în ordinea creșterii unghiului (măsurat în sens trigonometric) pe care aceștia îl formează cu sensul pozitiv al dreptei orientate l (fig. 55). Se arată că folosind această numerotare este adevărată inegalitatea

$$\begin{aligned} |\vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_k + \vec{OP}_{k+1} + \vec{OP}_{k+2}| &\geq \\ &\geq |\vec{OP}_2 + \dots + \vec{OP}_k + \vec{OP}_{k+1}|. \end{aligned} \quad (1)$$

Dacă punctele P_1 și P_{k+2} sînt ambele situate pe dreapta l , iar suma $\vec{OP}_1 + \vec{OP}_{k+2}$ degeneratează într-un punct (fiind dată de vec-

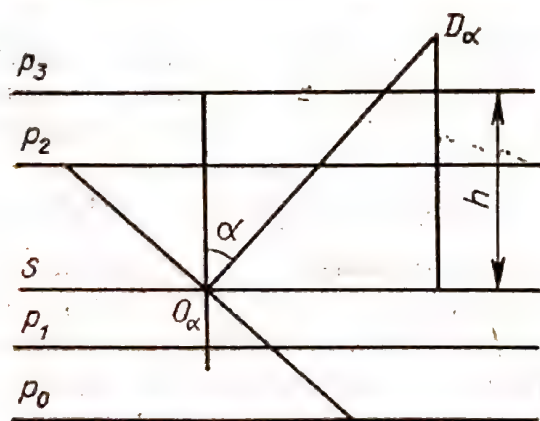


Fig. 54

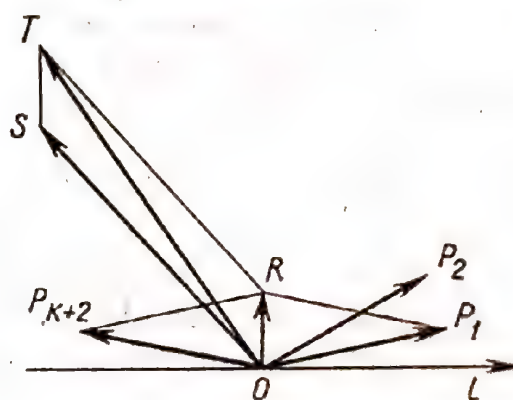


Fig. 55

torul nul $\vec{0}$), vectorii al căror modul formează membrii inegalității considerate coincid, deci inegalitatea este evidentă. În continuare se va considera că cel puțin unul din punctele P_1 și P_{k+2} nu este

situat pe dreapta l . Suma vectorilor $\overrightarrow{OP_1}$ și $\overrightarrow{OP_{k+2}}$ va fi în acest caz vectorul nenul \overrightarrow{OR} format de diagonala orientată a rombului de laturi $\overrightarrow{OP_1}$ și $\overrightarrow{OP_{k+2}}$. De aceea nici unul din unghiurile P_1OR și ROP_{k+2} nu este mai mare decât $\frac{\pi}{2}$. Dacă se notează $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_2} + \dots$

$\dots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}}$, ținând seama de modul în care au fost renumerate vectorii, rezultă că vectorul \overrightarrow{OS} este situat fie în interiorul unghiului P_1OR , fie în interiorul unghiului ROP_{k+2} și, prin urmare, unghiul ROS este ascuțit. Suma $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}$ este reprezentată de diagonala orientată \overrightarrow{OT} a paralelogramului respectiv și deoarece în triunghiul OST unghiul OST este obtuz, înseamnă că cea mai mare latură în acest triunghi este OT , adică $|\overrightarrow{OT}| > |\overrightarrow{OS}|$, ceea ce demonstrează inegalitatea (1). Fiindcă $|\overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}}| \geq 1$, conform presupunerii de la inducție, rezultă din (1) că

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_{k+1}} + \overrightarrow{OP_{k+2}}| \geq 1.$$

Conform principiului inducției complete înseamnă că inegalitatea considerată este valabilă pentru orice valori impare ale lui n .

R e z o l v a r e a II. Se observă că dacă se dă un cerc de centru O , un punct M în planul său, diferit de punctul O , și punctele P_1 și P_2 situate la intersecția diametrului OM cu cercul, astfel ca $MP_1 \geq MP_2$, dacă un punct Q descrie unul din semicercurile P_2P_1 , distanța MQ crește monoton de la MP_2 la MP_1 . De aceea, dacă Γ este un arc de cerc cu centrul în punctul O și cu extremitățile în A și B , iar M este un punct în planul lui Γ , astfel ca punctul P_2 corespunzător să nu se afle pe Γ , atunci punctul de pe Γ cel mai apropiat de M este sau punctul A sau punctul B . Fie n vectori (fără a se cere ca n să fie impar) $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$, de lungime 1, situați în același semiplan. Fie $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_{n-1}}$. Dacă P_1, \dots, P_{n-1} rămân fixați, iar P_n variază în acel semiplan astfel încît $|\overrightarrow{OP_n}| = 1$, atunci punctul S definit prin relația

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_n}$$

va descrie semicercul de rază 1 cu centrul în R , avînd extremitățile în A și B pe o paralelă la l și situat în semiplanul inițial considerat față de l . Se remarcă faptul că punctul R este situat în semiplanul inițial.

Din cauza poziției semicercului, punctul de pe acesta care este cel mai apropiat de O este sau A sau B . Se deduce astfel că dacă $\overrightarrow{OP_1}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ sînt n vectori de lungime 1 situați în același semiplan determinat de l , atunci înlocuind unul din ei (de exemplu $\overrightarrow{OP_n}$) cu un vector de lungime 1 situat pe l , este posibil ca $|\overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_n}|$ să fie micșorat. Aceasta reduce problema la cazul cînd vectorii $\overrightarrow{OP_k}$ sînt toți situați pe l , deci $\overrightarrow{OP_k} = \varepsilon_k \vec{v}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ iar \vec{v} este un vector de lungime 1 așezat în sensul drepte orientate l . În acest caz $\overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_n} = (\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n) \vec{v}$. Vectorul din membrul al doilea al egalității precedente are lungimea $|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n|$, lungime care, pentru n impar, este evident mai mare sau egală cu 1.

88. Se observă că luînd în considerație numai mulțimi de puncte situate în același plan, proprietățile cerute sînt îndeplinite, de exemplu, de mulțimea vîrfurilor unui pentagon sau hexagon regulat.

Se folosește ultima mulțime pentru construcția în spațiu a exemplului cerut. Se ia mulțimea vîrfurilor a două hexagoane regulate, concentrice, situate însă în plane diferite. Se va arăta că această mulțime are proprietățile cerute. Dacă punctele A și B sînt vîrfuri ale aceluiași hexagon, atunci punctele C și D , cum s-a mai observat, se găsesc printre celelalte vîrfuri ale aceluiași hexagon. În continuare se consideră cazul cînd punctele A și B aparțin la hexagoane diferite. Dacă se folosește faptul că un hexagon regulat admite centru de simetrie și se iau drept puncte C și D simetricele punctelor A și B față de acest centru, se constată cu ușurință că dreapta CD este paralelă cu dreapta AB . Existența unei mulțimi finite de puncte cu proprietățile cerute de enunț este astfel demonstrată.

89. Se presupune că ecuația din enunț admite rădăcina $x_0 > 0$. Pentru această valoare

$$x_0^4 - |a|x_0^3 - |b|x_0^2 - |a|x_0 + 1 \leq x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0$$

sau

$$|a|x_0^3 + |b|x_0^2 + |a|x_0 \geq x_0^4 + 1.$$

Se verifică ușor inegalitățile

$$x_0^4 + 1 \geq 2x_0^2 \text{ și } x_0^4 + 1 \geq x_0^3 + x_0,$$

cu ajutorul cărora se obține

$$\begin{aligned} x_0^4 + 1 &\leq |a|x_0^3 + |b|x_0^2 + |a|x_0 \leq |a|(x_0^4 + 1) + |b|\frac{x_0^4 + 1}{2} = \\ &= \left(|a| + \frac{|b|}{2}\right)(x_0^4 + 1), \end{aligned}$$

ceea ce arată că

$$|a| + \frac{|b|}{2} \geq 1 \text{ sau, altfel scris, } |b| \geq 2 - 2|a|.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq |a|^2 + (2 - 2|a|)^2 = 5|a|^2 - 8|a| + 4 = \\ &= 5\left(|a| - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Dacă ecuația inițială are rădăcina negativă x_0 , se observă ușor că $-x_0$ este rădăcină pozitivă pentru ecuația $x^4 - ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$. Se obține, printr-o demonstrație ca mai sus, că și în acest caz $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$. Cazul $x_0 = 0$ nu este posibil.

Astfel, în toate cazurile expresia $a^2 + b^2$ nu este mai mică decât $\frac{4}{5}$. Se verifică ușor că valoarea $\frac{4}{5}$ se obține pentru $a = -\frac{4}{5}$ și $b = -\frac{2}{5}$.

90. Se consideră că soldatul pleacă din vârful A al triunghiului. Pentru a verifica, între altele, punctele B și C , el se va afla la un moment dat pe arcul de cerc de rază $\frac{h}{2}$ (h fiind înălțimea triunghiului)

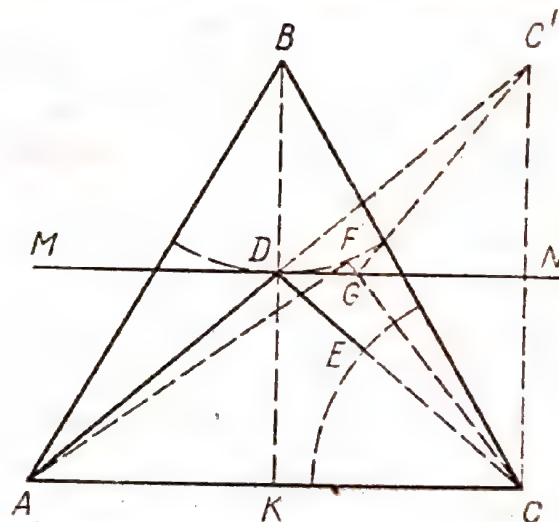


Fig. 56

cu centrul în B , respectiv pe arcul de cerc de aceeași rază cu centrul în C (fig. 56). Se va găsi cel mai scurt dintre aceste drumuri. Se presupune că soldatul ajunge mai întâi pe arcul de cerc cu centrul în B , iar apoi pe arcul de cerc cu centrul în C . Dacă la acest drum se adaugă

drumul pînă la punctul C , problema se reduce la găsirea celui mai scurt drum de la A la C cu condiția ca acesta să aibă un punct comun cu primul arc de cerc. Se va arăta că acest drum cel mai scurt va fi linia poligonală ADC , punctul D fiind mijlocul înălțimii din vîrfurile B , procedînd în modul următor. Prin punctul D se duce dreapta MN paralelă cu AC și se notează cu O' simetricul punctului C față de această dreaptă. În acest fel un drum oarecare de la A la C (AFC pe figură) poate fi înlocuit cu drumul de aceeași lungime de la A la O' ($AFGO'$ pe figură). Drumul care urmează dreapta ADC' va fi, evident, cel mai scurt. Fie E punctul de intersecție al segmentului DC cu al doilea arc. Lăsînd la o parte drumul de-a lungul razei EC , se găsește că ADE este cel mai scurt drum pe care se verifică punctele B și C .

Rămîne de demonstrat faptul că în acest mod sînt verificate și toate celelalte puncte ale triunghiului, adică toate aceste puncte sînt situate față de drumul ADE la o distanță care nu depășește $\frac{h}{2}$. Aceasta se poate face descompunînd în mod convenabil triunghiul în porțiuni. Demonstrația este propusă cititorului.

Așadar, drumul ADE este cel căutat.

91. Punctul x_f care este dat la punctul c) se numește punct fix al funcției f . Trebuie demonstrat că toate funcțiile din mulțimea G au un punct fix comun. Se arată ușor că funcția liniară $f(x) = ax + b$ are în cazul $a = 1$ un punct fix numai dacă $b = 0$. Înseamnă că dacă $f \in G$ și $a = 1$, atunci $b = 0$. Funcția liniară $f(x) = x$ are însă toate punctele fixe, deci are un punct fix comun cu fiecare funcție din mulțimea G . Astfel, propoziția din enunț este evidentă în cazul în care mulțimea G este formată numai din una sau două funcții, între care una să fie $f(x) = x$. Se va considera deci că G conține cel puțin două funcții care sînt diferite de $f(x) = x$.

Fie aceste funcții $f_1(x) = a_1x + b_1$ și $f_2(x) = a_2x + b_2$ ($a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 1$). Punctele fixe ale acestor funcții sînt respectiv $x_{f_1} = \frac{b_1}{1 - a_1}$ și $x_{f_2} = \frac{b_2}{1 - a_2}$. Conform cu condițiile a) și b) $g = f_1 \circ f_2 \in G$, $h = f_2 \circ f_1 \in G$ și $g \circ h^{-1} \in G$. Înlocuind în mod corespunzător, se obține $g(x) = a_1(a_2x + b_2) + b_1$, $h(x) = a_2(a_1x + b_1) + b_2$, $h^{-1}(x) = \frac{x - a_2b_1 - b_2}{a_2a_1}$ (în condițiile problemei $a_1 \neq 0$ și $a_2 \neq 0$), $g \circ h^{-1} = x + [(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2)]$. S-a arătat însă că

din faptul că $g \circ h^{-1} \in G$ și $g \circ h^{-1}$ are coeficientul lui x egal cu 1 rezultă că $(a_1 b_2 + b_1) - (a_2 b_1 + b_2) = 0$, ceea ce arată că

$$\frac{b_1}{1 - a_1} = \frac{b_2}{1 - a_2}, \text{ adică } x_{f_1} = x_{f_2}.$$

Întrucît aceasta este adevărat pentru orice pereche de funcții din mulțimea G , înseamnă că s-a demonstrat că toate funcțiile $f \in G$ au un punct comun k astfel ca $f(k) = k$.

92. Sensul problemei constă în a elimina diferențele pronunțate între mărimile termenilor vecini, mărind fiecare termen a_k . Este evident că numerele a_k nu determină unic numerele b_k .

Unele rezolvări se bazează pe găsirea unui algoritm de mărire succesivă a numerelor a_k astfel încît în final să se obțină numerele căutate b_k . Se vor expune în continuare două rezolvări ale acestei probleme.

R e z o l v a r e a I. Cea mai scurtă rezolvare se obține observînd că numerele căutate b_k pot fi luate de forma

$$b_k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + \dots + a_n q^{n-k}.$$

Se verifică îndeplinirea condițiilor a), b), c).

Condiția a) este îndeplinită în mod evident.

Dacă $1 \leq k \leq n-1$, rezultă $q b_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2 - 1) + \dots + a_n q^{n-k+1} \cdot (q^2 - 1) < 0$ și, în mod analog, $q b_{k+1} - b_k < 0$, deci condiția b) este îndeplinită. În fine, $b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 + a_2 q + a_3 q^2 + \dots + a_n q^{n-1} + a_1 q + a_2 + a_3 q + \dots + a_n q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + a_3 q^{n-3} + \dots + a_n < (a_1 + a_2 + \dots + a_n) (1 + 2q + 2q^2 + \dots + 2q^{n-1}) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \frac{1+q}{1-q}$, ceea ce înseamnă că este îndeplinită și condiția c).

R e z o l v a r e a II. Această rezolvare, cu toate că este mai lungă decît prima, are un aspect mai natural. Se construiesc mai întîi numerele reale c_1, c_2, \dots, c_n pentru care sînt îndeplinite aceleași condiții a), b), c), însă inegalitățile stricte din condițiile a) și b) sînt înlocuite cu inegalități nestricte și anume:

$$a') \quad a_k \leq c_k, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$b') \quad q \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq \frac{1}{q}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

$$c') \quad c_1 + c_2 + \dots + c_n < \frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Pentru fiecare număr $a_i (1 \leq i \leq n)$ se consideră numerele $\varphi_i(k) = a_i q^{i-k} (1 \leq k \leq n)$, care pot fi interpretate ca valorile ordonatelor unei funcții $\varphi_i(x)$ pentru abscisele întregi $x = k$, al cărei grafic pe segmentele de forma $[k, k+1] (k = 1, \dots, n-1)$ este dat de segmente de dreaptă.

Graficul funcției $\varphi_i(x)$ va fi astfel format de o linie poligonală, funcția $\varphi_i(x)$ fiind crescătoare pe intervalul $[1, i)$ și descrescătoare pe intervalul $(i, n]$. În punctul $x = i$ funcția admite un maxim $\varphi_i(i) = a_i$.

Se observă următoarea proprietate a funcțiilor $\varphi_i(x)$: dacă pe intervalul $(l, l+1)$, l fiind întreg, două funcții $\varphi_{i_1}(x)$ și $\varphi_{i_2}(x)$ au aceeași monotonie (amîndouă sînt crescătoare sau amîndouă sînt descrescătoare), pe acest interval graficele celor două funcții sau nu au nici un punct comun, sau coincid.

Considerînd, de exemplu, că ambele funcții sînt crescătoare, din definiția lui $\varphi_i(x)$ rezultă că $\varphi_{i_1}(l) = q\varphi_{i_1}(l+1)$, iar $\varphi_{i_2}(l) = q\varphi_{i_2}(l+1)$. Este clar, în consecință, că relația de ordine prin care sînt legate numerele $\varphi_{i_1}(l+1)$ și $\varphi_{i_2}(l+1)$ va fi aceeași care va lega și numerele $\varphi_{i_1}(l)$ și $\varphi_{i_2}(l)$ și deci și valorile funcțiilor $\varphi_{i_1}(x)$ și $\varphi_{i_2}(x)$ pentru orice $x \in [l, l+1]$.

Cazul cînd ambele funcții sînt descrescătoare pe intervalul $(l, l+1)$ se studiază analog, rezultînd că proprietatea enunțată este îndeplinită întotdeauna.

Se notează, în continuare, $c_k = \max_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(k) (1 \leq k \leq n)$ și se verifică îndeplinirea de către c_k a condițiilor a'), b'), c').

Condiția a') este evident îndeplinită, deoarece $c_k = \max_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(k) \geq \varphi_k(k) = a_k$.

Pentru a verifica îndeplinirea condiției b') se consideră c_l și c_{l+1} . Din definiția lui c_k rezultă că $c_l = \varphi_{i_1}(l)$ și $c_{l+1} = \varphi_{i_2}(l+1)$. Dacă $i_1 = i_2$, se obține

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{1}{q} \text{ sau } \frac{c_{l+1}}{c_l} = q,$$

după cum funcția $\varphi_i(x)$ este crescătoare sau descrescătoare pe intervalul $(l, l+1)$, deci se îndeplinește și condiția b').

În cazul $i_1 \neq i_2$, graficele funcțiilor $\varphi_{i_1}(x)$ și $\varphi_{i_2}(x)$ se intersectează pe intervalul $(l, l+1)$ și conform cu proprietatea mai sus citată una dintre ele este crescătoare iar cealaltă este descrescătoare pe acest interval. Întrucît $\varphi_{i_1}(l) = \max_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(l) > \varphi_{i_2}(l)$ și $\varphi_{i_2}(l+1) =$

$= \max_{1 \leq i \leq n} \varphi_i(l+1) > \varphi_{i_1}(l+1)$, înseamnă că funcția $\varphi_{i_1}(x)$ descreește, iar funcția $\varphi_{i_2}(x)$ crește pe intervalul $[l, l+1]$. Astfel

$$q = \frac{\varphi_{i_1}(l+1)}{\varphi_{i_1}(l)} < \frac{\varphi_{i_2}(l+1)}{\varphi_{i_1}(l)} = \frac{c_{l+1}}{c_l} < \frac{\varphi_{i_2}(l+1)}{\varphi_{i_2}(l)} = \frac{1}{q}.$$

Condiția b') este satisfăcută, deci, și în acest caz.

Pentru verificarea condiției c') se observă că $c_k < \varphi_1(k) + \varphi_2(k) + \dots + \dots + \varphi_n(k) = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \dots + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + \dots + a_n q^{n-k}$, și de aceea suma $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ se va evalua ca și în primul mod de rezolvare.

Condițiile a'), b'), c') sînt astfel verificate.

În continuare se trece de la numerele c_1, c_2, \dots, c_n la numerele b_1, b_2, \dots, b_n , care se cereau. Se poate scrie pe baza lui c') :

$$\frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (c_1 + c_2 + \dots + c_n) = d > 0.$$

Se notează $b_k = c_k + \frac{d}{2n}$, $1 \leq k \leq n$. Condiția a) este evident satisfăcută. Condiția c) este satisfăcută la rîndul său, deoarece $b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \frac{d}{2} < \frac{1+q}{1-q} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$. Îndeplinirea condiției b), adică valabilitatea inegalităților

$$q < \frac{c_{l+1} + \frac{d}{2n}}{c_l + \frac{d}{2n}} < \frac{1}{q}$$

poate fi dedusă din inegalitățile $q \leq \frac{c_{l+1}}{c_l} \leq \frac{1}{q}$ ($0 < q < 1$), studiind separat cazurile $c_{l+1} > c_l$ și $c_{l+1} < c_l$. Propunem cititorului această demonstrație.

93. După fiecare joc toți jucătorii primesc $p + q + r$ bile. Din enunț rezultă că $N(p + q + r) = 39$. Deoarece p, q și r sînt numere întregi pozitive diferite între ele, înseamnă că $p + q + r \geq 6$. Întrucît $N \geq 2$, se deduce, descompunînd numărul 39 în factori, că $N = 3$, iar $p + q + r = 13$. Jucătorul B care a luat la ultimul joc r bile, nu putea lua la nici unul din primele jocuri r sau q bile, deoarece ar fi luat în total cel puțin 13 bile, ceea ce contrazice enunțul pro-

blemei. Din această cauză atît la primul cît și la al doilea joc el a primit cîte p bile. Jucătorul C nu putea lua r bile la primul joc, deoarece primind la al doilea joc cel puțin q bile și la al treilea cel puțin p bile, ar fi totalizat nu mai puțin de 13 bile. contrazicîndu-se enunțul conform căruia el a primit doar 9 bile în total. Astfel, jucătorul C nu putea primi decît q bile la primul joc. Raționamentele ulterioare, prin care se găsesc ușor valorile lui p , q și r și se reface în întregime desfășurarea jocului, sînt lăsate cititorului. Se demonstrează astfel că se poate efectiv realiza un joc satisfăcînd condițiile din enunț și în acest caz în primul joc vor reveni q bile jucătorului C .

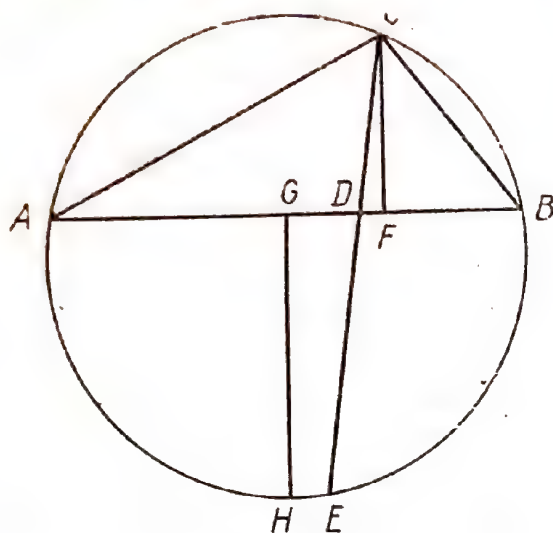


Fig. 57

94. Pe latura AB a triunghiului ABC se ia punctul arbitrar D și se prelungește segmentul CD pînă cînd intersectează în punctul E cercul circumscris triunghiului ABC (fig. 57). Se obține $CD \cdot DE = AD \cdot DB$, rezultînd astfel că

lungimea lui CD este medie geometrică a lungimilor lui AD și DB dacã și numai dacã $CD = DE$.

Înseamnă că determinarea punctului D care are proprietățile cerute este echivalentă cu determinarea unui punct E pe cercul circumscris triunghiului ABC , astfel încît punctul de intersecție al segmentelor AB și CE să fie mijlocul segmentului CE . Găsirea unui astfel de punct E pe cerc este posibilă dacã și numai dacã $CF \leq HG$, unde CF este înălțimea triunghiului ABC , iar HG înălțimea segmentului de cerc AHB , care se sprijină pe AB și nu conține punctul C . Se calculează ușor că

$$CF = 2r \sin A \sin B \text{ și } HG = r - r \cos C = 2r \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Se observă că inegalitatea din enunțul problemei este echivalentă cu $CF \leq HG$, care s-a demonstrat că este condiția necesară și suficientă pentru determinarea punctului D cu proprietățile cerute.

95. Se consideră o generalizare a sumelor care intervin în enunțul problemei. Se introduce, pentru $m \geq 1$, notațiile :

$$A_m = \sum_k C_m^{2k+1} 2^{3k} \text{ și } B_m = \sum_k C_m^{2k} 2^{3k}, \quad (C_m^0 = 1). \\ (0 < 2k+1 \leq m) \quad (0 \leq 2k \leq m)$$

Pentru m impar și mai mare decât unu, A_m constituie suma din enunț. Folosind egalitatea cunoscută $C_m^{l+1} + C_m^l = C_{m+1}^{l+1}$ ($l+1 \leq m$), se verifică ușor că pentru $m \geq 1$

$$A_m + B_m = A_{m+1}, \quad 8A_m + B_m = B_{m+1}. \quad (1)$$

Se va arăta în continuare prin inducție completă că A_m (m impar) și B_m (m par) nu se divid la 5. Pentru toate valorile $m \leq 3$ aceasta este adevărat, deoarece $A_1 = 1$, $A_3 = 11$, $B_2 = 9$. Se presupune că aceasta este adevărat pentru toți $m \leq i$, $i > 3$, și se va demonstra că atunci afirmația este adevărată și pentru toți $m \leq i+1$.

Aplicînd, de fapt, de cîteva ori egalitățile (1), se găsește

$$\begin{aligned} A_{m+3} &= A_{m+2} + B_{m+2} = 9A_{m+1} + 2B_{m+1} = 5(5A_m + 2B_m) + B_m, \\ B_{m+3} &= 5(17A_m + 5B_m) + 3A_m. \end{aligned}$$

Rezultă, din aceste relații, particularizînd, că sumele din enunț nu se divid la 5, oricare ar fi numărul natural n .

96. Din punctul b) al enunțului problemei rezultă că $a_i \geq i$ și de aceea

$$32 = a_1 + a_2 + \dots + a_p \geq \frac{p(p+1)}{2},$$

ceea ce înseamnă că $p \leq 7$.

Se scriu toate descompunerile posibile ale numărului 32 în șapte termeni naturali distincți:

- 1) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 11$;
- 2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10$; 4) $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9$;
- 3) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 9$; 5) $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8$.

Primul caz nu se poate realiza, deoarece pe tabla de șah de dimensiuni 8×8 nu există un dreptunghi format din 22 pătrățele. Cazurile celelalte pot fi realizate, fapt care se arată construind exemple.

97. Se observă ușor că suma S este omogenă față de numerele a, b, c, d , care intervin în termenii săi, adică nu își schimbă valoarea cînd aceste numere se înmulțesc toate cu același număr nenul. Din această cauză mulțimea valorilor sumei S nu va fi modificată dacă se consideră că numerele a, b, c, d satisfac relația $a + b + c + d = 1$. Se notează $a + c = x > 0$, $b + d = y > 0$; condiția impusă se scrie astfel $x + y = 1$.

Fie suma

$$S_1 = \frac{a}{a+b+d} + \frac{c}{b+c+d} = \frac{a}{1-c} + \frac{c}{1-a} = \frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x}.$$

Dacă x este păstrat constant, iar (a, c) parcurge toate perechile de numere reale pozitive pentru care $a+c=x$, se arată ușor că produsul ac parcurge toate numerele reale pozitive care nu depășesc numărul $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$, adică $ac \in \left(0, \frac{x^2}{4}\right]$, interval pe care expresia

$$S_1 = \frac{2ac+x-x^2}{ac+1-x} = 2 + \frac{3x-2-x^2}{ac+1-x},$$

considerată ca funcție de ac , variază monoton luând toate valorile din intervalul $\left(x, \frac{2x}{2-x}\right]$.

Se demonstrează analog că, pentru y păstrat constant, expresia

$$S_2 = \frac{b}{a+b+c} + \frac{d}{a+c+d}$$

ia toate valorile din intervalul $\left(y, \frac{2y}{2-y}\right]$.

Să ia atunci toate valorile din intervalul

$$\left(x+y, \frac{2x}{2-x} + \frac{2y}{2-y}\right] = \left(1, \frac{4-4xy}{2+xy}\right].$$

Dacă x și y iau valori pozitive arbitrare pentru care $x+y=1$, atunci se arată, prin raționamente asemănătoare, că expresia $\frac{4-4xy}{2+xy}$ ia toate valorile din intervalul $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$. Se deduce astfel că S ia toate valorile din intervalul $(1, 2)$.

Cititorii care au noțiuni de analiză matematică pot folosi pentru rezolvarea acestei probleme proprietățile funcțiilor continue. Este evident că

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

și

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1.$$

Se arată în continuare că S poate lua valori oricât de apropiate de 1 și 2, iar apoi, folosind sub o formă sau alta teorema despre valorile intermediare ale unei funcții continue, se stabilește că S ia toate valorile din intervalul $(1, 2)$.

98. Se presupune că fiecare dintre polinoamele $P(x) - 1$ și $P(x) + 1$ are cel puțin trei rădăcini întregi distincte, nici una dintre ele, evident, nefiind comună celor două polinoame. Se notează cu a cel mai mic din aceste șase numere întregi și se consideră, fără a restrânge generalitatea, că a este rădăcină a polinomului $P(x) + 1$. Este evident că polinomul $P(x) + 1$ se poate pune sub forma $P(x) + 1 = (x - a)Q(x)$, unde $Q(x)$ este de asemenea un polinom cu coeficienți întregi. Fie p, q, r cele trei rădăcini întregi diferite ale polinomului $P(x) - 1$, care sînt toate mai mari decît a , pe baza modului în care a fost ales acesta. Dar $P(x) - 1 = (x - a)Q(x) - 2$, deci $2 = (p - a)Q(p) = (q - a)Q(q) = (r - a)Q(r)$, iar $p - a, q - a$ și $r - a$ sînt numere întregi pozitive diferite între ele. Rezultă că cel puțin unul din ele este mai mare decît 2, ceea ce, evident, contrazice faptul că acesta este divizor al numărului 2.

Astfel, presupunerea făcută este falsă și rezultă că cel puțin una din ecuațiile $P(x) = 1$ sau $P(x) = -1$ are cel mult două rădăcini întregi. Ținînd seama și de faptul că numărul rădăcinilor fiecăreia din aceste două ecuații nu poate depăși $\deg(P)$, rezultă inegalitatea cerută.

99. Desfăcînd parantezele în inegalitatea care se cere demonstrată, se constată că aceasta este echivalentă cu inegalitatea

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Această inegalitate se demonstrează prin inducție completă. Pentru $n = 1$ aceasta este evidentă și se presupune că este adevărată pentru $n = k$. Se va arăta că este adevărată și pentru $n = k + 1$. Dacă $z_i = y_i$, conform cu presupunerea făcută $\sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i \leq \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$ și, adăugînd la ambii membri $x_1 y_1$, se obține inegalitatea căutată.

Se consideră în continuare $z_1 = y_m$, $m \neq 1$ și $y_1 = z_l$, $l \neq 1$. Întrucît $x_1 \geq x_i$ și $y_1 \geq y_m$, rezultă $(x_1 - x_i)(y_1 - y_m) \geq 0$, deci $x_1 y_1 + x_i y_m \geq x_1 y_m + x_i y_1$. De aceea, suma $\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i$ nu se micșorează dacă termenii $x_1 z_1 = x_1 y_m$ și $x_i z_i = x_i y_1$ sînt înlocuiți prin termenii

$x_1 y_1$ și $x_l y_m$. Suma obținută astfel se poate scrie sub forma $x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i$, notînd pentru $i \geq 2$,

$$z'_i = \begin{cases} z_i, & \text{dacă } i \neq l, \\ y_m, & \text{dacă } i = l, \end{cases}$$

notația pentru care este evident că z'_2, \dots, z'_{k+1} este o permutare a numerelor y_2, \dots, y_{k+1} . Ținînd seama de presupunerea de la inducție $\sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i \leq \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$, înseamnă că $\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i \leq x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z'_i \leq \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i$, ceea ce se cerea demonstrat.

100. Fie A_r un subșir al lui $\{a_k\}$ ($k > 1$) format din numerele care prin împărțirea la a_1 dau restul r . Întrucît, dacă r variază de la 0 la $a_1 - 1$, fiecare număr a_k intră într-unul din subșirurile A_r , înseamnă că cel puțin unul din aceste subșiruri va fi infinit. Se va arăta că termenii acestui subșir infinit $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_i}, \dots$ începînd de la termenul a_{k_1} vor constitui numerele căutate a_m . Aceștia se pot reprezenta, de fapt, sub forma $a_{k_i} = p_i a_1 + r$. De aceea, pentru $i \geq 2$, $a_{k_i} - a_{k_1} = (p_i - p_1) a_1$, deci $a_{k_i} = x a_{k_1} + y a_1$, caz în care $x = 1$, $y = p_i - p_1 > 0$ și $k_1 \neq 1$ deoarece $k_1 > 1$.

101. Se notează cu α, β , respectiv γ mărimile unghiurilor A, B, C ale triunghiului ABC . Se construiește punctul B' în interiorul unghiului ARB ($\angle ARB = 150^\circ$), astfel ca

$$B'R = BR \quad (1)$$

și $\angle BRB' = 90^\circ$. Astfel $\angle B'RA = 60^\circ$. Se obține $B'R = AR$, deci $\triangle AB'R$ este echilateral.

Se unește punctul B' cu punctul Q și se consideră $\triangle AB'Q$. Un calcul simplu arată că $\angle B'AQ = \alpha$, iar din teorema sinusurilor rezultă că $AQ = \frac{AC \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{AC}{2 \cos 15^\circ}$. Din $\triangle ARB$ se constată că

$$AR = \frac{AB}{2 \cos 15^\circ}. \text{ Deoarece } AR = AB', \text{ rezultă că } \frac{AQ}{AB'} = \frac{AC}{AB},$$

adică $\triangle AB'Q \sim \triangle ABC$ și deci $\angle AB'Q = \beta$, găsindu-se

$$\angle RBP = \angle RB'Q. \quad (2)$$

Din asemănarea triunghiurilor BCP și ACQ rezultă că $\frac{BC}{BP} = \frac{AC}{AQ}$,
iar din asemănarea triunghiurilor $AB'Q$ și ABC că $\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{B'Q}$,
ceea ce arată că

$$BP = B'Q. \quad (3)$$

Din relațiile (1), (2), (3) rezultă că prin rotirea liniei poligonale RBP cu un unghi de 90° în jurul punctului R în sensul acelor de ceasornic, aceasta se transformă în linia poligonală $RB'Q$, punctul P transformându-se în punctul Q , ceea ce înseamnă că $PR = QR$ și deci $\angle PRQ = 90^\circ$.

102. Se observă că deoarece $4444^{4444} < 10\,000^{4444}$, numărul cifrelor lui 4444^{4444} nu depășește în scrierea zecimală pe $4444 \cdot 4 + 1 < 20\,000$. Astfel rezultă că $A < 9 \cdot 20\,000 = 180\,000$, adică $B < 9 \cdot 5 = 45$. Din această cauză, dacă se notează suma cifrelor numărului B cu C , se găsește

$$C < 4 + 9 = 13. \quad (1)$$

Se observă că suma cifrelor unui număr dă același rest ca și numărul prin împărțirea la 9. Rezultă astfel că

$$4444^{4444} \equiv C \pmod{9}. \quad (2)$$

Pe de altă parte, $4444 \equiv 7 \pmod{9}$ și de aceea $4444^{4444} \equiv 7^{4444} \pmod{9}$, de unde rezultă că $4444^{4444} \equiv (-2)^{3 \cdot 1481} \cdot 7 \equiv (-8)^{1481} \cdot 7 \equiv 7 \pmod{9}$. Având în vedere relațiile (1) și (2), se obține $C = 7$.

103. Se arată ușor că există o infinitate de perechi de triunghiuri dreptunghice distincte având lungimea ipotenuzei 2 și lungimile catetelor exprimate prin numere raționale (cum sînt, de exemplu,

triunghiurile avînd lungimile catetelor $\frac{4n}{n^2 + 1}$ și $\frac{2n^2 - 2}{n^2 + 1}$, n fiind un

număr natural). Se fixează diametrul AB al cercului dat de rază 1

și se construiesc pe acest diametru 1975 astfel de triunghiuri distincte ABC_i ($i = 1, 2, \dots, 1975$), punctele C_i fiind luate pe același semicerc. Se va arăta că punctele C_i sînt punctele căutate. Fie două dintre acestea C_1 și C_2 , iar D_1 și D_2 sînt proiecțiile acestora pe diametrul AB . Se notează $\angle C_1BA = \alpha$, $\angle C_2AB = \beta$ și se obține $C_1C_2 = \frac{D_1D_2}{\cos(\alpha - \beta)}$. Lungimea lui D_1D_2 se exprimă printr-un număr

rațional, deoarece se arată ușor că mărimile lui AD_1 și AD_2 sînt raționale. În afară de aceasta, mărimile $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \alpha$, $\cos \beta$ sînt raționale și deci $\cos(\alpha - \beta)$ va fi tot un număr rațional. Astfel lungimea lui C_1C_2 se exprimă printr-un număr rațional.

104. Rezolvarea I. Folosind proprietatea b), se notează $a = b = c = y$. Se obține astfel $P(2y, y) = 0$ pentru orice y . Se deduce din aceasta că polinomul $P(x, y)$ se divide la $x - 2y$. Dacă se notează $a = b = x$, $c = -2x$ și se ține seama de proprietățile a) și b), se găsește

$$2^n P(x, -x) + 2P(-x, x) = 0. \quad (1)$$

Notînd $a = x$, $b = -x$, $c = 0$, se obține $P(0, 0) + P(-x, x) + P(x, -x) = 0$. Evident, însă, că $P(0, 0) = 0$ și deci $P(x, -x) = -P(-x, x)$. Folosind a), rezultă că $(2^n - 2) \cdot P(x, -x) = 0$, oricare ar fi x . De aceea, $P(x, -x) = 0$ pentru $n > 1$. Se deduce că polinomul $P(x, y)$ se divide la $x + y$.

Fie $P_1(x, y) = \frac{P(x, y)}{x + y}$. Se arată ușor că polinomul $P_1(x, y)$ de grad $n - 1$ posedă proprietățile a), b), c). Proprietatea b) se verifică prin calcul direct în cazul $a + b + c \neq 0$, iar în cazul $a + b + c = 0$ rezultă din continuitatea polinomului.

Astfel, $P_1(x, y)$ se divide prin $x - 2y$ și prin $x + y$. Din aproape în aproape se obține că $P(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}$.

Rezolvarea II. Fie n gradul lui P . Se poate scrie

$$P(x, y) = (x + y)^n Q\left(\frac{y}{x + y}\right),$$

unde Q este un polinom al cărui grad nu depășește pe n , care satisface condiția $Q(\alpha) + Q(\beta) + Q(1 - \alpha - \beta) = 0$ sau, pentru a ușura raționamentele următoare, condiția se poate transcrie $Q(\alpha) + Q(1 - \beta) + Q(\beta - \alpha) = 0$. Această identitate în α, β arată că gradul lui Q nu poate fi mai mare ca 1, deoarece termenii de forma $c\alpha^m\beta^p$ din $Q(\beta - \alpha)$ nu pot fi reduși de nici un termen din $Q(\alpha) + Q(1 - \beta)$ în cazul cînd $m > 0$, $p > 0$. Rezultă $Q(z) = cz + d$. Se obține

$$c\alpha + d + c\beta + d + c(1 - \alpha - \beta) + d = 0, \text{ adică } c + 3d = 0,$$

iar $1 = P(1, 0) = 1^n Q(0) = d$, deci $d = 1$, $c = -3$. Prin urmare

$$Q(z) = -3z + 1, \quad P(x, y) = (x + y)^n \left(-3 \frac{y}{x + y} + 1 \right)$$

sau, în final,

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1} (x - 2y).$$

105. Dacă $ABCD$ este patrulaterul din enunț, se notează $AB = a$, $BD = b$ și $CD = c$. Întrucât aria S a patrulaterului este suma ariilor triunghiurilor ABD și BCD ,

$$\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc \geq 32. \quad (1)$$

Pe de altă parte, $a + b + c = 16$, de aceea $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} b(16 - b) = 32 - \frac{1}{2} (8 - b)^2 \leq 32$ adică

$$\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc \leq 32. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2}$, deci $\angle ABD = \angle BDC = 90^\circ$. Deoarece $32 - \frac{1}{2} (8 - b)^2 = 32$, înseamnă că $b = 8$.

În continuare se observă ușor că lungimea diagonalei AD nu depinde de raportul lungimilor laturilor AB și CD . Într-adevăr, dacă se poartă în continuarea segmentului DC segmentul $CE = AB$, se formează paralelogramul $ABEC$ și deci $BE = AC$ și $DE = a + c = 16 - b = 8$. Fiindcă $BD = 8$, înseamnă că $BE = 8\sqrt{2}$ și deci lungimea diagonalei AC nu poate avea decât valoarea $8\sqrt{2}$.

106. Ecuația considerată are gradul 2^n . Se pot obține rădăcinile care nu aparțin intervalului $[-2, 2]$ făcând substituția $x = 2 \cos t$. În acest caz $P_1(x) = 2 \cos 2t$ și se obține prin inducție că $P_n(x) = 2 \cos 2^n t$. Ecuația se va scrie

$$\cos 2^n t = \cos t,$$

soluțiile ei fiind date de $2^n t \pm t = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Soluțiile care se află în intervalul $[0, \pi]$ sînt:

$$0, \frac{2\pi}{2^n + 1}, \frac{4\pi}{2^n + 1}, \dots, \frac{2^n \pi}{2^n + 1} \text{ și } \frac{2\pi}{2^n - 1}, \frac{4\pi}{2^n - 1}, \dots, \frac{(2^n - 2)\pi}{2^n - 1}$$

În continuare se demonstrează că toate aceste valori sînt distincte.

Într-adevăr, $\frac{2k_1\pi}{2^n+1} = \frac{2k_2\pi}{2^n-1}$ atrage după sine $k_1 2^n - k_1 = k_2 2^n + k_2$, deci $k_1 + k_2 = (k_1 - k_2) 2^n$. Deoarece $k_1 \leq 2^{n-1}$, $k_2 \leq 2^{n-1} - 1$, rezultă $k_1 + k_2 < 2^n$, adică $k_1 = k_2$ și $k_1 + k_2 = 0$. Se deduce $k_1 = k_2 = 0$.

Prin această metodă s-au obținut 2^n rădăcini distincte. Ținînd seama de gradul polinomului, este evident că acestea vor fi toate rădăcinile sale.

107. Condiția ca să se poată umple cutia cu cuburi de volum 1 este echivalentă cu exprimarea lungimilor muchiilor sale prin numere întregi. Se vor nota aceste lungimi prin a , b , c și se va considera că $a \leq b \leq c$.

Deoarece pe un segment de lungime n nu se pot purta în continuare mai mult de $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor$ segmente de lungime $\sqrt[3]{2}$, volumul maxim care este ocupat în cutie de cuburile de volum 2 va fi

$$\left\lfloor \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor.$$

Enunțul cere ca acest volum să constituie 40 % din volumul cutiei, deci

$$2 \left\lfloor \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor \left\lfloor \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor = 0,4 abc.$$

Relația obținută se poate scrie sub forma

$$\frac{a}{\left\lfloor \frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor} \cdot \frac{b}{\left\lfloor \frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor} \cdot \frac{c}{\left\lfloor \frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor} = 5.$$

Variația mărimilor $\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor$ și $\frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right\rfloor}$ este dată de tabelul

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]$	0	1	2	3	3	4	5	6	7	7
$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]}$	—	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$

Se arată că, dacă $n \geq 7$, are loc inegalitatea

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]} < \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Pentru $n = 7$, inegalitatea este imediată. Din inegalitatea evidentă

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] > \frac{n}{\sqrt[3]{2}} - 1$$

rezultă

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]} < \sqrt[3]{2} \left(1 + \frac{1}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]} \right).$$

Dacă $n \geq 8$, $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right] \geq 6$ și deci $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]} < 1,26 \left(1 + \frac{1}{6} \right) = 1,47 < 1,5$,

ceea ce demonstrează inegalitatea (1).

Din studiul tabelului și din inegalitatea (1) rezultă că $n > 1$ valoarea maximă a lui $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}} \right]}$ este 2 și se obține pentru $n=2$, pentru

următoarea valoare este $\frac{5}{3}$ și se obține pentru $n=5$, iar celelalte valori nu depășesc $\frac{3}{2}$.

Revenind la determinarea numerelor a, b, c , este evident că $a \geq 2$.

Se va arăta că $a = 2$. Într-adevăr, dacă $a > 2$,

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}} \right] \left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right] \left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right] < \left(\frac{5}{3} \right)^3 = \frac{125}{27} < 5.$$

Astfel, este necesar ca $a = 2$. În acest caz $\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right]} \frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right]} = \frac{5}{2}$. Rămân

de studiat încă două cazuri: $b = 2, c = \frac{5}{4}$ și $b = \frac{5}{3}, c = \frac{3}{2}$.

(sau $b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{3}$), deoarece dacă b și c nu ar depăși fiecare pe $\frac{3}{2}$, ar rezulta

$$\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}} \right]} \cdot \frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right]} \leq \frac{9}{4} < \frac{5}{2}.$$

Se va arăta că primul caz nu este posibil. Într-adevăr, dacă $\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right]} = \frac{5}{4}$, înseamnă că $4c = 5 \left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right]$ și deci $64c^2 = 125 \left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}} \right]^3 \leq$

$\leq 125 \frac{c^3}{2} = 62,5 c^2$, ceea ce nu este posibil. Cel de-al doilea caz se realizează când $b = 5, c = 6$ sau $b = 3, c = 5$. În consecință, cutia care satisface condițiile din enunț va trebui să aibă dimensiunile $2 \times 3 \times 5$ sau $2 \times 5 \times 6$.

108. Un factor oarecare m al numărului care se cere determinat poate fi înlocuit cu doi factori de forma 2 și $m - 2$. Înlocuirea trebuie să ducă totdeauna la un număr mai mic, deci $2(m - 2) < m$,

adică $m < 4$, deci numărul va conține numai factorii 2 și 3. Deoarece $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$, rezultă că numărul maxim se va scrie sub una din formele 3^m , $2 \cdot 3^n$ sau $2^2 \cdot 3^p$.

Primul caz este imposibil, deoarece numărul 1976 nu este multiplu de 3, al treilea caz este imposibil deoarece $1976 \neq 3p + 4$, rămânând astfel posibil numai cel de-al doilea caz, găsindu-se astfel $n = 658$. Numărul cerut este deci $2 \cdot 3^{658}$.

109. Se consideră cele $(2p + 1)^q$ sisteme de numere (x_1, x_2, \dots, x_q) în care x_j ($j = 1, 2, \dots, q$) sînt numere întregi cu proprietatea $|x_j| \leq p$.

Pentru un astfel de sistem de numere va fi valabilă inegalitatea

$$|a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q| \leq qp,$$

deci numărul de sisteme posibile

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q, \dots, a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q)$$

care corespund sistemelor (x_1, x_2, \dots, x_q) considerate nu depășește $(2pq + 1)^p$.

Relația $(2pq + 1)^p < (2p + 1)^q$ este adevărată, deoarece este echivalentă cu $(4p^2 + 1)^p < (2p + 1)^{2p}$, adică cu $4p^2 + 1 < (2p + 1)^2$, care este evident satisfăcută. Rezultă din aceasta că există două sisteme distincte de numere $(x'_1, x'_2, \dots, x'_q)$, $(x''_1, x''_2, \dots, x''_q)$ cu proprietățile amintite (x'_i și x''_i sînt numere întregi și nu depășesc în modul numărul p), astfel ca $a_{i1}x'_1 + \dots + a_{iq}x'_q = a_{i1}x''_1 + a_{i2}x''_2 + \dots + a_{iq}x''_q$ pentru $i = 1, 2, \dots, p$. Cu notația $x_j = x'_j - x''_j$ se găsește $|x_j| \leq 2p = q$, $x_j \neq 0$ pentru cel puțin unul din indicii j , $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iq}x_q = 0$ pentru $i = 1, 2, \dots, p$, ceea ce se cerea demonstrat.

110. Termenul general u_n se scrie sub forma

$$u_n = x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Relația de recurență devine

$$x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} = x_n x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_n x_{n-1}^2} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^2} + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \right) - \frac{5}{2}. \quad (1)$$

Se impune șirului $\{x_n\}$ condiția

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1}^2 \quad (x_0 = 1, x_1 = 2).$$

Această condiție implică

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^2} + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} = \frac{x_n x_{n-1}^2}{x_n^2} + \frac{x_n^2}{x_n x_{n-1}^2} = \frac{x_n}{x_{n-1}^2} + \frac{x_{n-1}^2}{x_n},$$

deci $\frac{x_n}{x_{n-1}^2} + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}$ este o constantă, care poate fi determinată dînd lui n valoarea 1. Rezultă astfel constanta $\frac{5}{2}$.

În concluzie, dacă șirul de termen general x_n este definit prin $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n x_{n-1}^2$, șirul de termen general $u_n = x_n + \frac{1}{x_n}$

satisface relațiile $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$, $u_{n+1} = u_n (u_{n-1}^2 - 2) - u_1$, deci

va fi șirul dat în enunțul problemei. Există, evident, un astfel de șir avînd termenii numere întregi mai mari ca 1, deci $[u_n] = x_n$. Pentru determinarea lui x_n se observă că $x_n = 2^{a_n}$, șirul de termen general a_n fiind dat de $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. Pentru a găsi acest ultim șir se consideră ecuația atașată relației de recurență care îl definește, $z^2 - z - 2$, care are rădăcinile $z_1 = 2$ și $z_2 = -1$, deci $a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2(-1)^n$. Deoarece $a_0 = 0$, rezultă că suma $c_1 + c_2 = 0$, iar $a_1 = 1$ atrage după sine $2c_1 - c_2 = 1$, adică $c_1 = -c_2 = \frac{1}{3}$, termenul general al acestui șir fiind în consecință

$$a_n = \frac{1}{3} [2^n - (-1)^n]. \text{ Din } 2 \equiv -1 \pmod{3} \text{ care implică } 2^n \equiv (-1)^n \pmod{3}$$

rezultă că a_n este număr întreg.

111. Rezolvarea I. Se notează cu O centrul pătratului. Pătratul este invariant față de rotații cu unghiuri de 90° , 180° și 270° în jurul punctului O , precum și față de simetriile relative la cele două drepte care trec prin O și sînt paralele cu laturile; întreaga figură va fi invariantă față de aceste transformări. Mijloacele segmentelor din cea de-a doua grupă din enunț pot fi aduse prin una sau două astfel de simetrii oricare peste un altul, iar rotațiile menționate arată că mijloacele segmentelor din prima grupă formează un pătrat concentric cu cel dat. Dreapta care unește punctul O cu mijlocul segmentului KL formează cu OK un unghi de 45° , de același sens ca și $\angle AOB$.

Se va demonstra că cele 12 puncte se află la egală distanță de punctul O și că unghiurile formate de drepte care unesc aceste

puncte cu O sînt de 30° . Dacă se notează cu Q mijlocul lui AB (fig. 58) și cu X mijlocul lui BK , se va arăta că $OX = OK \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\angle XOQ = 75^\circ$ (dreapta punctată unește O cu mijlocul lui KL) în modul următor :

$$OQ = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AK = QX,$$

deci $\triangle OQX$ este isoscel. Rezultă astfel că

$$\angle XOQ = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle OQX) = \frac{1}{2} [180^\circ -$$

$$- (\angle OQB - \angle BQX)] = \frac{1}{2} [180^\circ - (90^\circ -$$

$$- 60^\circ)] = 75^\circ.$$

În $\triangle OKX$ unghiul cu vîrfurile în K este de 30° , deci lungimea înălțimii din O este jumătate din cea a lui OK , unghiul din vîrfurile în X este $\angle QOX - 30^\circ = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$, deci $OX = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} OK$, ceea ce trebuia demonstrat.

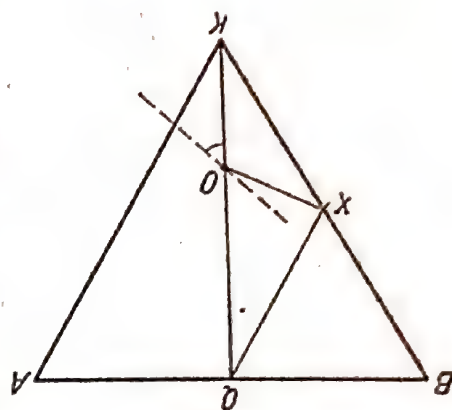


Fig. 58

R e z o l v a r e a II. Se alege un sistem de axe avînd originea în centrul pătratului, iar axele paralele cu laturile acestuia. Fără a restrînge generalitatea, se face presupunerea că $OA = 1$, iar punctul A se află în primul cadran (aceasta înseamnă de fapt alegerea unității de măsură în sistemul luat și determinarea corespunzătoare

a axelor). Afixul punctului A este $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, afixul lui B este $-\bar{z}$ etc. Distanța dintre punctul K și mijlocul segmentului AB fiind $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, înseamnă că afixul lui K este $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \frac{i}{2}$, al lui L este

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ etc. Deoarece afixul mijlocului unui segment este egal cu

semisuma afixelor extremităților segmentului, se pot calcula afixele tuturor celor 12 puncte care ne interesează. Pentru mijlocul seg-

mentului AK se găsește afixul $\frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ care, scris sub for-

ma trigonometrică, va fi $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)$. Din

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ se deduce $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, și, ținând seama de faptul că α este un unghi ascuțit, rezultă că $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Calculând astfel toate celelalte afixe, se obține, pentru acestea $z_k = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \left(\cos \frac{k\pi}{12} + i \sin \frac{k\pi}{12} \right)$ ($k = 1, 2, \dots, 23$). Deoarece z_k constituie rădăcinile ecuației $z^{12} = -\rho^{12}$, $\left(\rho = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$, înseamnă că cele 12 puncte formează un dodecagon regulat.

112. Rezolvarea I. O succesiune finită $\{x_n\}$ este complet determinată dacă se cunosc toate sumele $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Se notează $s_0 = 0$ și se observă că ipotezele din enunț sînt echivalente cu $s_n > s_{n+7}$ și $s_n > s_{n-11}$ pentru valorile lui n pentru care au sens. În cazul unui șir care conține cel puțin 17 termeni se obține $s_{17} > s_6 > s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > s_{15} > s_4 > s_{11} > s_0 = 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10} > s_{17}$, ceea ce ar constitui o contradicție. Dacă succesiunea conține 16 termeni, atunci termenii extremi dinde inegalitățile de mai sus dispar, iar inegalitățile rămase reprezintă toate condițiile impuse acesteia, condiții evident necontradictorii, ceea ce dă reprezentarea tuturor succesiunilor cu 16 elemente satisfăcînd condițiile din enunț.

Rezolvarea II. Se arată că într-o succesiune finită de numere reale în care suma oricăror m termeni consecutivi este negativă iar suma oricăror p termeni consecutivi este pozitivă, numărul maxim de termeni este $m + p - d - 1$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor m și p .

În prima etapă se arată că existența unei succesiuni finite cu $m + p - d$ termeni conduce la contradicție. Dacă termenii se grupează cîte d , se obține, considerînd sumele respective, o nouă succesiune cu $\frac{1}{d}(m + p - d)$ termeni. În acest mod se reduce problema la cazul $d = 1$.

Presupunînd că $d = 1$, se notează, ca și la rezolvarea I, $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, succesiune fiind x_1, x_2, \dots . Dacă sînt k termeni, $s_n > s_{m+n}$ pentru $n = 0, 1, \dots, k - m$, iar $s_n > s_{n-p}$ este adevărată pentru $n = p, p + 1, \dots, k$. În cazul în care $p \leq k - m + 1$, deci $k \geq p + m - 1$, orice $n = 0, 1, \dots, k$ apare în una din cele două situații, mulțimea finită de numere s_0, s_1, \dots, s_k neavînd element minimal, ceea ce este absurd. S-a demonstrat în acest fel că

numărul maxim de termeni ai unei succesiuni cu proprietățile din enunț este cel mult egal cu $m + p - d - 1$.

În a doua etapă a demonstrației se arată că este posibilă construirea unei succesiuni avînd $m + p - d - 1$ termeni și satisfăcînd proprietățile din enunț. Nu se mai face presupunerea $d = 1$, deoarece, grupînd ca și la prima etapă termenii, se neglijează o parte din condiții. La fel ca și în cadrul rezolvării I, succesiunea este complet determinată dacă se cunosc toate sumele s_n . Trebuie arătat că ansamblul de inegalități, care a fost considerat în prima rezolvare, nu conduce la contradicție. Este necesar pentru apariția unei contradicții ca $s_{i_1} > s_{i_2} > \dots > s_{i_q}$, pentru indicii i_1, i_2, \dots, i_q presupuși diferiți doi câte doi. Asemenea inegalități apar numai pentru $i_{r+1} - i_r = m$ sau $i_{r+1} - i_r = p$, ceea ce arată că $i_r \equiv i_1 \pmod{d}$. Se deduce astfel că $q \leq \frac{m+p-d}{d}$. Notînd cu α numărul de diferențe egale cu m

și cu β numărul de diferențe egale cu $-p$, se obține, pe de o parte, că $\alpha m - \beta p = 0$, deci p este divizor al lui αm , și cum numai d se divide la $\frac{m}{p}$, rezultă că $\alpha \geq \frac{p}{d}$ iar, pe de altă parte, $q = \alpha + \beta$.

Deci $\frac{m+p}{d} \leq \alpha + \beta = q \leq \frac{m+p-d}{d}$, ceea ce este fals. Sistemul de egalități considerat nu poate conduce la contradicție, deci se poate construi o succesiune conținînd $m + p - d - 1$ termeni cu proprietățile enunțate.

113. Fie G_n grupul multiplicativ al claselor de resturi modulo n , prime cu n , H un subgrup al lui G_n diferit de G_n , iar V mulțimea tuturor numerelor întregi mai mari decît 1 care aparțin unei clase modulo n din H . Există în acest caz numerele $m_1, m_2, m_3, m_4 \in V_n$, distincte două câte două, indecompozabile în V , astfel încît $m_1 m_2 = m_3 m_4$. Pentru a demonstra această afirmație se folosește următoarea propoziție:

L e m ă. Mulțimea numerelor prime care nu aparțin lui V și nu divid pe n este infinită.

Se presupune că mulțimea considerată în enunțul lemei ar fi finită și s-ar compune din numerele prime p_1, p_2, \dots, p_s . Dacă p_1, p_2, \dots, p_s nu aparțin mulțimii V , atunci numărul $p_1 p_2 \dots p_s + n$ nu este în V , deci va avea un divizor prim care nu se află în V (H fiind grup), divizor care nu poate coincide cu nici unul din numerele p_1, p_2, \dots, p_s , deoarece altfel ar rezulta că numărul respectiv divide pe n ; în mod analog se observă că acel divizor nu poate divide pe n .

Aceasta constituie însă o contradicție. Dacă $p_1 \dots p_s$ aparține lui V , atunci $p_1^2 \dots p_s$ nu aparține lui V și raționamentul de mai sus conduce de asemenea la o contradicție. Mulțimea din lema nu poate fi vidă, deoarece atunci toți factorii primi ai oricărui număr prim cu n ar fi în V , deci s-ar contrazice ipoteza prin obținerea egalității $H = G_n$.

Pe baza acestei leme se vor determina două numere prime diferite p și q nesituate în V , nedivizând pe n și astfel încît $p \equiv q \pmod{n}$. Fie $k > 1$ exponentul minim pentru care $p^k \in V$. Se poate lua $m_1 = p^k$, $m_2 = q^k$, $m_3 = p^{k-1}q$, $m_4 = pq^{k-1}$, care sînt deci congruente modulo n în V (deoarece $m_1 = p^k \in V$) și orice divizor al lor este congruent cu p^r modulo n , $r < k$, ceea ce arată că acesta nu se găsește în V , deci aceste numere sînt indecompozabile în V .

114. Se scrie $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$. Se obține $2 - 2A \cos 2x - 2B \sin 2x \geq 0$ pentru orice x . Cu substituția $A = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \alpha$ și $B = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \alpha$, se obține $\sqrt{A^2 + B^2} \cos(2x - \alpha) \leq 1$ pentru orice x , ceea ce pentru $x = \frac{\alpha}{2}$ conduce la $A^2 + B^2 \leq 1$.

Dacă se scrie $f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$, se găsește $2 - a(\cos x - \sin x) - b(\cos x + \sin x) \geq 0$, deci $2 - \sqrt{2}a \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2b \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, și, procedînd ca mai sus, $\sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \beta\right) \leq \sqrt{2}$, pentru orice x , rezultînd că $a^2 + b^2 \leq 2$.

Observație. Reciproca afirmației din enunț nu este adevărată.

115. Mai întîi se determină numerele q și r . Pe de o parte $q \leq \lfloor \sqrt{1977} \rfloor = 44$. Obținerea unei inegalități de sens contrar pleacă de la $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$, inegalitate imediată. Ținînd seama de aceasta și de faptul că $r < a + b$, se găsește că $q = \left\lfloor \frac{a^2 + b^2}{a + b} \right\rfloor \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b} - 1 \geq \frac{1}{2}(a + b) - 1 > \frac{r}{2} - 1$. Inegalitatea $q \leq 43$ implică $r \geq 1977 - 43^2 = 128$, deci $43 \geq q > \frac{r}{2} - 1 \geq 63$, ceea ce constituie o contradicție. S-a demonstrat astfel că $q = 44$, $r = 1977 - 44^2 = 41$.

În continuare se scrie $a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41$ sau, altfel, $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 2 \cdot 22^2 + 41 = 1009$. Pentru a reprezenta numărul 1009 ca sumă a două pătrate perfecte nu este nevoie a face $[\sqrt{1009}] + 1$ încercări. Se ține seama de faptul că ultima cifră a unui pătrat perfect în scriere zecimală este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Suma terminată cu 9 se obține numai din $0 + 9$ sau $4 + 5$, ceea ce limitează încercările la 0, 3, 10, 15, 20, 25 și 30. Se obține soluția unică a acestei scrieri sub forma $1009 = 28^2 + 15^2$, ceea ce conduce la $a - 22 = \pm 28$, $b - 22 = \pm 15$. Soluțiile vor fi: (50, 37), (37, 50), (50, 7), (7, 50). Pentru toate este verificată inegalitatea $a + b > r = 41$.

116. Relația $f(n+1) > f(n)$ arată că $\min \{f(n) | n \in N\}$ este obținut numai pentru cazul $n = 1$, deci $f(n) > 1$ pentru $n > 1$. Dacă se consideră restricția lui f la mulțimea $\{2, 3, \dots\}$, valorile acestei restricții sînt tot în mulțimea $\{2, 3, \dots\}$ și deci $f(n) > f(2)$ pentru $n > 2$. Se demonstrează apoi prin inducție față de n că $n \leq f(n) < f(n+1)$ pentru $n > 2$, pasul de la n la $n+1$ realizîndu-se prin considerarea restricției lui f la mulțimea $\{n+1, n+2, \dots\}$. Stabilindu-se monotonia strictă a lui f , se deduce $f(n) \geq n$, iar deoarece din enunț $f(n) < f(n+1)$, rezultă $f(n) = n$.

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR DIN MATERIALELE JURIULUI

117. Se consideră punctele A și B între care distanța să fie minimă. Se alege din celelalte puncte punctul C , astfel ca $\sphericalangle ABC$ să fie maxim. Punctele A, B, C nu se află, conform enunțului, pe aceeași dreaptă. Se demonstrează că cercul determinat de punctele A, B, C este cel căutat. Unghiul ACB este ascuțit (se poate demonstra și că $\sphericalangle ABC \leq 60^\circ$). În caz contrar acesta ar fi cel mai mare unghi în triunghiul ABC și, în consecință $AB > AC$ și $AB > BC$, ceea ce ar contrazice alegerea punctelor A și B . Prin reducere la absurd, se presupune că există un punct M printre celelalte situat în interiorul cercului.

Cazul I. Punctul M este situat în interiorul segmentului de cerc ACB . Rezultă că $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$, ceea ce contrazice alegerea punctului C .

Cazul II. Punctul M este situat în interiorul segmentului de cerc complementar lui ACB , ceea ce înseamnă că $\sphericalangle AMB$ este unghi

obtuz, deci este contrazisă alegerea punctului O . Rezultă astfel că nu se găsesc puncte situate în interiorul cercului dat. Pe cerc este posibil să se afle unele din acestea, de exemplu dacă ele constituie vîrfurile unui poligon cu n laturi înscris în cerc.

118. Se poate scrie

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Prin urmare

$$[(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)]^2 = (1 + a_1) \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \dots (1 + a_n) \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Astfel, deoarece

$$\left[\left(1 + a_i\right) \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \right]^2 = 1 + 1 + a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2 + 2 = 4,$$

rezultă

$$[(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)]^2 \geq 4^n.$$

119. Se consideră toate triunghiurile avînd vîrfurile în punctele date și se alege $\triangle ABC$ care conține cel mai mare număr de puncte. Dreptele AB , BC și CA împart planul în trei tipuri de domenii: I, II și III (fig. 59).

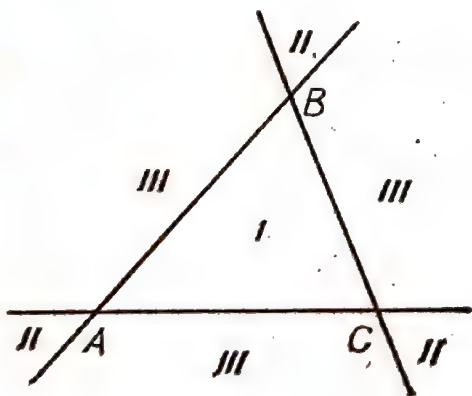


Fig. 59

a) Dacă cel puțin un punct D este situat în interiorul unuia din domeniile de tipul III (fie acesta de bază AB), patrulaterul $ABCD$ este convex.

b) Dacă ambele puncte D și E (v. fig. 41) se află în interiorul triunghiului, dreapta DE intersectează numai două laturi ale acestuia (de exemplu AB și BC). Conform enunțului, dreapta DE nu poate trece prin vîrfurile triunghiului, deci punctele A , D , E , C formează un patrulater convex.

c) Din construcția triunghiului ABC rezultă că nu se găsesc puncte situate în domeniile de tipul II. Dacă ar exista un punct D în astfel de domeniu, fie acesta mărginit de prelungirile dincolo de punctul B ale laturilor AB și CB , $\triangle ADC$ ar include $\triangle ABC$, în interiorul său aflîndu-se astfel mai multe puncte.

120. Pe baza condițiilor $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{\sin \alpha} < 2$ și $\frac{1}{\cos \alpha} < 2$, rezultă că $0 \leq \frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha} \leq \frac{\pi}{4 \sin \alpha} < \frac{\pi}{2}$ și $0 \leq \frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha} \leq \frac{\pi}{4 \cos \alpha} < \frac{\pi}{2}$,

deci ambele tangente sînt pozitive.

Dacă $\alpha < \alpha$,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha} + \operatorname{tg} \frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha} \geq \operatorname{tg} \frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha} > 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha}.$$

Dacă $\alpha = \alpha$, se găsește că $\operatorname{tg} \frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha} + \operatorname{tg} \frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha} = 2 > 1$.

Dacă $\alpha > \alpha$,

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha} + \operatorname{tg} \frac{\pi \cos \alpha}{4 \cos \alpha} \geq \operatorname{tg} \frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha} > 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi \sin \alpha}{4 \sin \alpha}.$$

121. Fie A_1, A_2, \dots, A_n vîrfurile poligonului m (fig. 60). În fiecare vîrf al poligonului se construiesc, în exterior, în planul poligonului perpendicularele pe cele două laturi care trec prin vîrful respectiv. Se obține astfel o împărțire a planului poligonului în următoarele părți:

- 1) porțiunea de plan mărginită de poligonul $A_1 A_2 \dots A_n$;
- 2) dreptunghiurile de înălțime infinită avînd bazele $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$;

3) porțiunile de plan $P_{A_1}, P_{A_2}, \dots, P_{A_n}$, mărginite de unghiurile notate cu literele A'_1, A'_2, \dots, A'_n respectiv. Se construiesc în spațiu două prisme avînd poligonul m ca bază, lungimea înălțimii R , situate de o parte și de alta a planului poligonului. Fețelor laterale ale prismei duble astfel construite li se adaugă, în exteriorul prismei, cite o jumătate de cilindru circular de rază R și înălțime egală cu latura respectivă; axa unui astfel de cilindru coincide cu latura poligonului. Corpul astfel obținut se completează adăugînd pentru fiecare vîrf fusul sferic determinat de bazele a doi cilindri care au centrul în acest vîrf. Se obține în acest fel corpul M_1 care, după cum

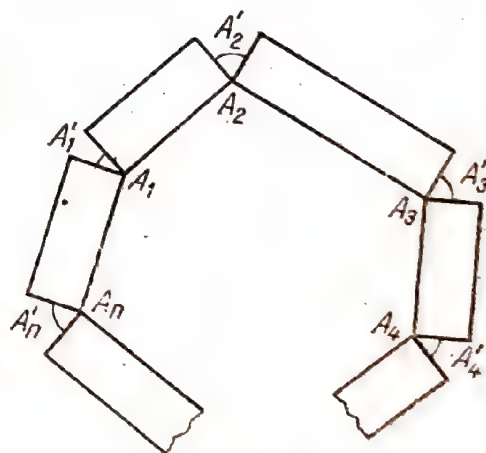


Fig. 60

se va demonstra, va fi corpul căutat. În figură este reprezentată proiecția acestuia pe planul poligonului, formată din însuși poligonul, care este proiecția prisme, n dreptunghiuri de înălțime R construite pe fiecare latură a poligonului și n sectoare circulare de rază R în fiecare vîrf al poligonului. Unghiul fiecărui sector este suplimentar unghiului poligonului cu care are același vîrf și are măsura pozitivă, deoarece poligonul m este convex. Două dreptunghiuri infinite vecine nu au puncte comune afară de vîrfurile respective ale poligonului, deci corpurile care se proiectează după aceste două dreptunghiuri au în comun numai punctele perpendicularei pe planul poligonului în vîrfurile respective. Se va calcula în continuare volumul corpului M_1 . Volumul prisme duble este $2RS$.

Volumul tuturor jumătăților de cilindru este

$$\frac{1}{2} \pi R^2 (A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_{n-1} A_n + A_n A_1) = \frac{1}{2} \pi l R^2.$$

iar cel al tuturor fuselor sferice

$$\frac{2}{3} R^3 (\hat{A}'_1 + \hat{A}'_2 + \dots + \hat{A}'_n) = \frac{2}{3} R^3 [n\pi - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n)] = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

ceea ce arată că ultimul volum este egal cu volumul sferei de rază R în fine

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 + \frac{1}{2} \pi l R^2 + 2SR.$$

Este necesar să se verifice că acest volum este cel al corpului căutat, adică M_1 este $M(R)$. Este evident că $M_1 \leq M(R)$, deoarece orice punct al prisme de înălțime R este situat față de proiecția sa pe bază la o distanță care nu depășește R , orice punct al cilindrului de rază R este situat la o distanță care nu depășește pe R față de axa cilindrului, iar fiecare punct al sferei de rază R este situat la o distanță care nu depășește R de centrul sferei (care este vîrf al poligonului). Pentru a arăta incluziunea de sens contrar, fie punctul oarecare $X \in M(R)$, iar Y un punct al lui m , astfel ca distanța $XY \leq R$. Se notează cu Z proiecția punctului X pe planul poligonului m . Sînt posibile trei cazuri:

- 1) Z aparține porțiunii plane mărginite de poligonul m ;
- 2) Z aparține unui dreptunghi de înălțime infinită, fie baza acestuia $A_1 A_2$;
- 3) Z aparține unei porțiuni de plan de cel de-al treilea tip, fie aceasta P_{A_1} .

În primul caz $XZ \leq XY \leq R$, ceea ce înseamnă că X aparține prismei. În cel de-al doilea caz fie Z_1 proiecția punctului Z pe A_1A_2 . Evident, Z_1 se află pe segmentul A_1A_2 , iar $XZ_1 \perp A_1A_2$ pe baza teoremei celor trei perpendiculare. Punctul Z_1 este punctul cel mai apropiat de Z printre toate punctele porțiunii mărginite de poligonul m . Este evident că celelalte puncte ale segmentului A_1A_2 și chiar ale dreptei A_1A_2 sînt mai îndepărtate de Z decît Z_1 , iar celelalte puncte din porțiunea plană mărginită de m sînt separate de Z de către dreapta A_1A_2 și deci sînt și mai îndepărtate. Astfel, dintre toate oblicele care unesc punctul X cu puncte din porțiunea considerată oblica XZ_1 are proiecția cea mai scurtă, adică dintre toate oblicele de acest fel, aceasta este cea mai scurtă, $XZ_1 \leq XZ \leq R$, deci punctul X se găsește pe semidreapta $Z_1X \perp A_1A_2$ la o distanță care nu depășește pe R de axa A_1A_2 a cilindrului respectiv, deci în jumătatea de cilindru corespunzătoare.

În cazul al treilea se consideră triunghiul ZAY . Unghiul acestuia ZAY (pentru $Y \neq A$) este evident obtuz, deoarece pe baza faptului că poligonul m este convex, punctul Y este situat în interiorul unghiului A_1 ($\hat{A}_1 < 180^\circ$), format de semidreptele A_1A_2 și A_1A_n , iar punctul Z prin construcție este situat în unghiul format de perpendicularele duse la aceste semidrepte în exteriorul unghiului acestora. Rezultă astfel că $ZA_1 \leq ZY$ și, prin urmare, $XA_1 \leq XY \leq R$, adică X se află în interiorul fusului respectiv de sferă.

În acest mod, s-a demonstrat că $M_1 = M(R)$.

122. Perpendiculara comună p la axele l_1 și l_2 ale celor doi cilindri îi intersectează pe aceștia după două segmente egale cu cele două diametre respectiv. Sînt posibile trei cazuri în care se pot afla cele două segmente astfel determinate :

1. Intersecția acestora este vidă.
2. Intersecția acestora conține un singur punct.
3. Intersecția acestora este segmentul s .

În primul caz cele două suprafețe nu se intersectează. În cel de al doilea prin punctul unic de intersecție se duce un plan perpendicular pe dreapta p . Se observă ușor că acest plan va fi tangent la ambii cilindri avînd cu fiecare cîte o dreaptă comună. Aceste două drepte vor coincide cînd axele cilindrilor vor fi paralele și prin urmare, în acest caz curba de intersecție a cilindrilor va fi plană. Dacă axele cilindrilor nu sînt paralele, generatoarele după care este tangent planul se intersectează într-un punct care este singurul punct comun al celor doi cilindri. Chiar dacă acest punct nu se consideră drept curbă plană, intersecția formată astfel dintr-un punct este totuși „plană“.

Se consideră cel de al treilea caz. Se face mai întâi presupunerea că axele cilindrilor nu sînt paralele. Printr-un punct arbitrar al lui s se duce planul Q perpendicular pe p , plan care intersectează fiecare cilindru după o pereche de generatoare paralele cu axa respectivă. Aceste patru drepte se intersectează două cîte două în patru puncte situate pe curba de intersecție a celor doi cilindri. Este evident că aceste patru puncte nu sînt situate simultan pe aceeași dreaptă. De aceea, dacă curba de intersecție este situată în întregime într-un plan, acesta poate fi numai Q . În acest caz curba de intersecție nu poate fi plană, deoarece raționamentele de mai sus se pot repeta pentru orice alt plan Q_1 care intersectează segmentul s . Dacă axele cilindrilor sînt paralele, atunci sînt paralele și cele patru drepte din planul Q , deci raționamentele precedente își pierd sensul. Se duce planul R perpendicular pe axele cilindrilor, plan care se intersectează cu cilindrii după două cercuri, care, conform presupunerii făcute se intersectează. Este evident că înșiși cilindrii se intersectează după două generatoare care sînt paralele cu axele și trec prin punctele de intersecție ale acestor cercuri. Perechea de drepte paralele este situată de asemenea într-un plan.

În concluzie, doi cilindri se intersectează după o curbă plană dacă și numai dacă axele lor sînt paralele. Curba de intersecție nu degenerază într-un punct sau în mulțimea vidă dacă

$$d \leq r_1 + r_2, \quad r_1 \leq d + r_2, \quad r_2 \leq r_1 + d,$$

d fiind distanța dintre axe iar r_i ($i = 1, 2$) razele cilindrilor.

123. Condițiile problemei permit numai echilibrarea balanței, vărsarea zahărului de pe un taler pe celălalt și adăugarea greutății fie unui taler, fie altuia. În șirul de cîntăriri a cărei schemă se dă în continuare, zahărul cîntărit deja se varsă pe talerul B , balanța se echilibrează cu zahăr care se adaugă pe talerul A , greutatea G de 1 g adăugîndu-se cîteodată pe talerul B .

Numărul cîntăririi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Talerul A	1	2	4	8	16	31	63	125	250	500
Talerul B	G	$1 + G$	$3 + G$	$7 + G$	$15 + G$	31	$62 + G$	125	250	500

După cea de a zecea cîntărire, vărsînd la un loc zahărul ambelor talere se obține 1 kg.

Se poate da și o altă schemă a cîntăririlor, dacă se permite așezarea greutății pe talerul A .

Numărul cântăririi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Talerul A	1	2	4	8	16	32	62+G	125	250	500
Talerul B	G	1+G	3+G	7+G	15+G	31+G	63	125	250	500

Problema nu poate fi rezolvată printr-un număr de cântăriri mai mic decât 10, deoarece după o cântărire, masa de zahăr măsurată prin aceasta poate fi cel mult egală cu masa de zahăr cântărit anterior, plus un gram. Astfel, după nouă cântăriri nu se poate măsura mai mult de 511 grame.

124. Valoarea x trebuie să îndeplinească condițiile :

$$\sin 3x \cdot \cos(60^\circ - 4x) = -1, \quad (1)$$

$$\sin(60^\circ - 7x) - \cos(30^\circ + x) + m \neq 0. \quad (2)$$

Ecuția (1) va avea soluțiile date de :

a) $\sin 3x + 1 = 0$, iar $\cos(60^\circ - 4x) = 1$, rezultând că $x = k \cdot 120^\circ + 90^\circ$, și, în același timp $x = l \cdot 90^\circ + 15^\circ$, prin urmare $6l - 8k = 5$, ceea ce nu se poate, deoarece membrul stâng este par, iar cel drept este impar.

b) $\sin 3x = 1$, iar $\cos(60^\circ - 4x) = -1$. Rezultă $x = k \cdot 120^\circ + 30^\circ$ și, în același timp, $x = l \cdot 90^\circ + 60^\circ$, de aceea $4k = 3l + 1$ sau $k - 1 = 3(l - k)$, prin urmare $k = 1 + 3l$ și, în consecință, $x = l \cdot 360^\circ + 150^\circ$. Dacă se înlocuiește această valoare a lui x în (2), se obține condiția $m \neq 2$.

125. Fie $f(x) = \frac{x + 189}{1964}$ și $g(x) = \sin x$. Se observă că f este o

funcție monotonă, iar $|g(x)| \leq 1$. Soluțiile ecuației date vor fi acele și numai acele numere reale ξ pentru care $f(\xi) = g(\xi)$.

Fie $f(a) = -1$ și $f(b) = 1$. În acest caz $a = -2153$, $b = 1775$, iar $f(c) = 0$ pentru $c = -189$.

Pe segmentul $[0, 1775]$ se pot așterne 282 intervale de lungime 2π , iar pe $[-2153, 0]$ se pot așterne 342 astfel de intervale. Pe segmentul $[0, 1775]$, $f(x) > 0$, iar pe fiecare interval de lungime 2π inclus în acest segment dreapta de ecuație $f(x) = y$ intersectează graficul funcției $g(x) = \sin x$ în două puncte. Pe cel de-al 283-lea interval de lungime 2π , în partea sa comună cu segmentul $[0, 1775]$ funcția f ia o valoare egală cu 1 într-un punct situat la dreapta lui ξ ($g(\xi) = 1$), de aceea pe acest interval există două puncte de intersecție. Astfel, pe segmentul $[0, 1775]$ se află $282 \cdot 2 + 2 = 566$ rădăcini ale ecuației.

Segmentul $[0, -2153]$ se descompune în două segmente $[0, -189]$ și $[-189, -2153]$. Pe primul dintre acestea se pot așterne $30,06 \dots$ intervale de lungime 2π , pe care $f(x) > 0$. De aceea se găsesc 60 de puncte de intersecție.

Pe cel de al 31-lea interval funcția f schimbă semnul, deci egalitatea $f(\xi) = g(\xi)$ se realizează numai într-un singur punct. Pe celelalte 311 intervale $y = f(x) < 0$, în consecință, pe fiecare interval se vor găsi două puncte de intersecție. Pe partea care rămîne din cel de-al 343-lea interval se așterne mai mult de o jumătate de sinusoidă; deoarece $-1 \leq \sin x < 0$ și $-1 < f(x) < 0$, se mai găsesc pe acest interval două puncte de intersecție. Astfel se găsesc în total 685 de puncte de intersecție avînd abscisele negative.

Ecuția va avea, în consecință, 1251 rădăcini.

126. Fie numerele naturale $x_1 \leq y_1$ și $x_2 \leq y_2$ astfel ca numărul natural z să se poată scrie

$$z = x_1! + y_1! = x_2! + y_2!. \quad (1)$$

Se poate face presupunerea că $x_1 < x_2$ (în caz contrar se poate schimba numerația). Nu este posibil astfel ca $y_1 < x_2$, deoarece s-ar obține

$$x_1! + y_1! < x_2! + x_2! \leq x_2! + y_2!,$$

ceea ce contrazice relația (1). De aceea $y_1 \geq x_2$, iar x_2 satisface inegalitățile $x_2 \leq y_2$, $x_2 \leq y_1$, de aceea numărul $x_2! + y_2! - y_1!$ se divide la $x_2!$. Pe baza condiției (1) $x_1!$ se divide de asemenea la $x_2!$, ceea ce contrazice presupunerea că $0 < x_1 < x_2$. Nu există deci un număr natural z cu proprietățile din enunț.

127. Fie n un număr natural care satisface condiția (1) din enunț. Se obține astfel

$$x \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ cifre}} - y \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ cifre}} = z^2 \underbrace{(111 \dots 1)^2}_{n \text{ cifre}}. \quad (2)$$

Ținînd seama de faptul că pentru orice număr natural k

$$10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{10 - 1},$$

se găsește din (2)

$$x \frac{10^{2n} - 1}{9} - y \frac{10^n - 1}{9} = z^2 \frac{(10^n - 1)^2}{9^2}.$$

După simplificarea cu $10^n - 1$ și eliminarea numitorilor, rezultă

$$9(10^n + 1)x - 9y = (10^n - 1)z^2,$$

sau, sub altă formă,

$$(9x - z^2)10^n = 9y - 9x - z^2. \quad (3)$$

Conform enunțului există numerele naturale $n_1 \neq n_2$, pentru care relația (1) este satisfăcută, deci este îndeplinită și relația (3), adică

$$(9x - z^2)10^{n_1} = 9y - 9x - z^2; (9x - z^2)10^{n_2} = 9y - 9x - z^2.$$

Scăzând aceste egalități, se ajunge la

$$(9x - z^2)(10^{n_1} - 10^{n_2}) = 0.$$

Deoarece $10^{n_1} - 10^{n_2} \neq 0$, este necesar ca

$$9x - z^2 = 0. \quad (4)$$

Folosind relația (4) în egalitatea (3), se găsește

$$9y - 9x - z^2 = 0. \quad (5)$$

Din relațiile (4) și (5) rezultă

$$x = k^2, y = 2k^2, z = 3k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Fiindcă $0 < x, y, z \leq 9$, problema admite două rezolvări: $x = 1, y = 2, z = 3$ și $x = 4, y = 8$ și $z = 6$. Oricare ar fi una din acestea, relația (3), deci și relația (1) sînt îndeplinite pentru orice n . Egalitatea este deci satisfăcută pentru orice număr natural n .

128. Fie numerele naturale i, j, k și l care satisfac condițiile $1 \leq i < j \leq n, 1 \leq k < l \leq n$. În acest caz

$$\frac{1}{a_i a_j} \geq \frac{4}{(a_i + a_j)^2}, \quad (1)^*$$

$$\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{a_k a_l} \geq 2 \frac{1}{\sqrt{a_i a_j}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k a_l}} \geq 4 \frac{2}{(a_i + a_j)(a_k + a_l)}. \quad (2)$$

* Inegalitățile (1) și (2) se deduc din inegalitățile

$$ab < \frac{(a + b)^2}{4}, \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

Adunând egalitățile (1) și (2), se obține inegalitatea dată. Egalitatea are loc dacă și numai dacă

$$\frac{1}{a_i a_j} = \frac{4}{(a_i + a_j)^2}, \quad (1')$$

$$\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{a_k a_l} = 4 \frac{2}{(a_i + a_j)(a_k + a_l)}, \quad (2')$$

adică în cazul în care

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

129. Fie Z_n mulțimea tuturor segmentelor care unesc cele n puncte și care împart cercul în n regiuni. Se convine ca aceste puncte să fie numerotate A_1, A_2, \dots, A_n în sensul rotației acelor de ceasornic și se adaugă încă un punct A_{n+1} între A_n și A_1 . Segmentul $A_{n+1}A_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) împarte în două atâtea regiuni, în câte părți este împărțit de către segmentele mulțimii Z_n . Segmentul $A_{n+1}A_k$ intersectează segmentele care unesc oricare din punctele A_1, A_2, \dots, A_{k-1} cu oricare din punctele $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_n$ (dar nu intersectează în puncte interioare segmentele care au pe A_{n+1} sau A_k drept extremități). Numărul acestor segmente este $(k-1)(n-k)$, iar punctele în care este împărțit $A_{n+1}A_k$ sînt în același număr sau mai puține; ultimul caz se ivește atunci cînd unele dintre aceste puncte coincid. Numărul părților în care este împărțit acest segment se obține mărind numărul punctelor de diviziune cu 1. Astfel, prin ducerea segmentului $A_{n+1}A_k$ numărul de regiuni se mărește cel mult cu $1 + (k-1)(n-k)$. Această evaluare nu depinde de faptul că din punctul A_{n+1} mai sînt duse sau nu alte segmente. După ducerea tuturor segmentelor $A_{n+1}A_1, A_{n+1}A_2, \dots, A_{n+1}A_n$ numărul regiunilor nu va depăși pe $u_n + \sum_{k=1}^n [1 + (k-1)(n-k)] = u_n + n + n \sum_{k=1}^n (k-1) - \sum_{k=1}^n k(k-1)$. Se demonstrează cu ușurință, prin inducție matematică, formula

$$\sum_{k=1}^n (k-1)(k-2) \dots (k-s) = \frac{1}{s+1} n(n-1) \dots (n-s).$$

Se obține astfel, prin transformări succesive,

$$u_{n+1} \leq u_n + n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Însumînd aceste inegalităţi şi ţinînd seama că $u_1 = 1$, rezultă

$$u_n \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Dacă oricare trei segmente din mulţimea Z_n nu sînt concurente în acelaşi punct, toate punctele de diviziune al căror număr s-a calculat sînt distincte, obţinîndu-se egalitatea

$$\max u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Rămîne de arătat că poate fi găsită o astfel de mulţime Z_n , ceea ce se va demonstra prin inducţie.

Fie punctele A_1, A_2, \dots, A_n alese în modul arătat. Se uneşte prin drepte fiecare punct în care se intersectează segmentele din Z_n cu toate punctele A_1, A_2, \dots, A_n . Punctele în care aceste drepte intersectează cercul a doua oară se notează respectiv cu B_1, B_2, \dots, B_m . Numărul m al acestora nu depăşeşte evident $n \cdot C_n^2$ (acesta poate fi exprimat prin u_n , însă nu este necesar). Este evident că dacă se alege drept A_{n+1} orice punct al cercului, diferit de B_1, B_2, \dots, B_m , segmentele $A_{n+1}A_k$ nu vor trece prin punctele de intersecţie ale segmentelor din Z_n , ceea ce înseamnă că nici în mulţimea Z_{n+1} nu există trei segmente concurente în acelaşi punct.

130. Fie K punctul de intersecţie al tangentelor la cerc în punctele C şi D (punctul K există deoarece punctele C şi D nu sînt diametral opuse), iar N punctul de intersecţie al dreptelor AC şi BD . Diferitele poziţii reciproce ale punctelor C şi D faţă de AB sînt date în fig. 61. Totuşi rezolvarea care urmează nu depinde de poziţia punctelor C şi D .

Fie triunghiul ABN , care are pe AC şi BD înălţimi, deci L este ortocentru şi în consecinţă LN este de asemenea înălţime, adică $LN \perp AB$.

Se va demonstra că punctul K este mijlocul segmentului LN . Fie K_1 punctul de intersecţie al dreptei LN cu tangenta la cerc în C , notată cu m . Pentru a arăta că punctul K_1 coincide cu K se consideră triunghiurile dreptunghice ABC şi NCL , formate prin intersectarea perechii de drepte perpendiculare AC şi BC cu dreptele AB şi NL .

Deoarece $AC \perp BC$, unghiurile drepte NCL şi ACB sînt neapărat adiacente.

$\angle CAB = \angle LNC = \alpha$ iar $\angle CBA = \angle NLC = \beta$ fiindcă sînt unghiuri ascuțite cu laturile perpendiculare. Tangenta m este exterioră triunghiului ABC formînd cu laturile sale CA și CB unghiuri

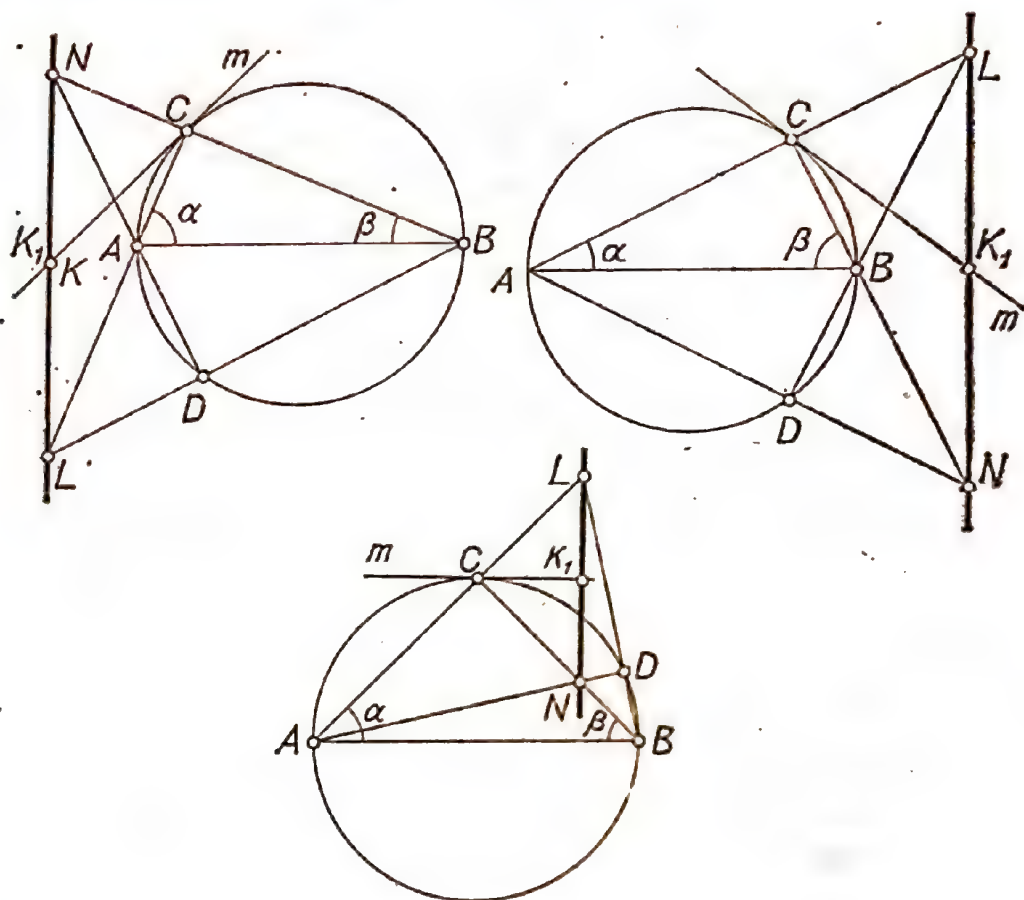


Fig. 61

ascuțite de mărime β , respectiv α . De aceea tangenta traversează triunghiul adiacent NCL .

$\angle K_1CN$ este format de BC și m și este ascuțit.

Prin urmare, $\angle K_1CN = \alpha$, iar $\angle K_1CL = \beta$ și $\triangle NK_1C$ și $\triangle LK_1C$ sînt isoscele, deci $K_1N = K_1C = K_1L$. Astfel tangenta m trece prin mijlocul K_1 al segmentului LN . În mod analog, tangenta la cerc în punctul D trece la rîndul său prin K_1 , deci $K = K_1$.

131. a) Mijlocul T al segmentului KY (fig. 62) aparține evident cercului care se obține din cercul K prin omotetia H , de centru Y și raport $1/2$. Cercul K_1 are centrul în punctul S_1 care este mijlocul segmentului SY , raza sa fiind $1/2$. Se va studia mulțimea tuturor

punctelor S_y , cînd Y parcurge domeniul Q . Aceste puncte umplu transformatul Q' al pătratului Q prin omotetia H_0 de centru S și raport $\frac{1}{2}$. Prin urmare, figura Q' este un pătrat cu centrul în M' , mijlocul segmentului SM , avînd latura de lungime 1, iar laturile

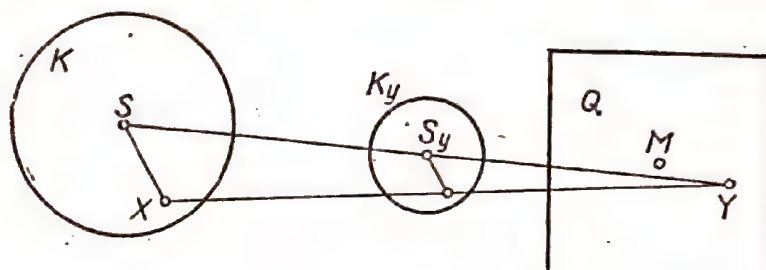


Fig. 62

ale pătratului Q' sînt paralele cu laturile corespunzătoare ale pătratului Q . Cercurile K_y umplu figura U .

b) Se consideră punctul Y fix. Punctul Z se obține din punctul T printr-o rotație de 45° în jurul lui Y (în sens direct sau invers urmată de o omotetie de centru Y și raport $\sqrt{2}$; prin aceste transformări cercul K_y căruia îi aparținea punctul T devine cercul K'_y de rază $\frac{\sqrt{2}}{2}$; centrul său S'_y se obține ca transformat al centrului S_y prin produsul de transformări descris anterior. De aceea punctul S'_y este vîrfurile triunghiului dreptunghic isoscel SYS' avînd ipotenuza SY . În consecință, punctul S'_y poate fi obținut ca transformat al punctului S_y prin aplicarea succesivă a două transformări: rotirea cu 45° în jurul punctului S (în sens direct sau retrograd) și omotetia de centru S și raport $\sqrt{2}$. Prin acest produs de transformări mulțimea punctelor S_y , adică pătratul Q' are ca imagine două pătrate Q_1 și Q_2 cu laturi de lungime $\sqrt{2}$. Cercurile K'_y umplu în acest caz figurile U_1 și U_2 . Fiecare dintre acestea este imagine a figurii U la o rotație de 45° (în sens direct sau invers în jurul punctului S , urmată de o omotetie de centru S și raport $\sqrt{2}$. Figurile U_1 și U_2 sînt descrise în fig. 63. Punctele Z umplu deci figurile U_1 și U_2 .

132. a) Ducînd $BB_1 \parallel AA'$ și $A'B_1 \parallel AB$ (fig. 64), se obține paralelogramul $AA'B_1B$. Dreapta paralelă cu AB și trecînd prin punctul M intersectează dreapta BB_1 în punctul N_1 . Se obține

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BN_1}{N_1B_1}.$$

să fie paralelogram. Paralela la AC care trece prin punctul M intersectează pe CC_1 în punctul M' , iar paralela la dreapta C_1C' care trece prin punctul M' intersectează pe CC' în punctul P_2 . Se găsește astfel :

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{CM'}{M'C_1} = \frac{CP_2}{P_2C'}.$$

Din această cauză punctul P_2 coincide cu P .

Fie E mijlocul segmentului MM' , F mijlocul segmentului $M'P$ și O mijlocul segmentului MP . Evident că $EO = M'F$, $EO \parallel M'F$, deci punctul O descrie o dreaptă paralelă cu mediana din vârful C al triunghiului CC_1C' ; această dreaptă trece prin mijlocul lui AC și prin mijlocul lui $A'C'$.

133. Se observă că $p \neq 0$ și că, dacă x_0 este o rădăcină a ecuației, $\sin x_0 \cos x_0 \neq 0$. Dacă se înmulțesc ambii membri ai ecuației cu $p \sin x \cos x$, se obține $p(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x$; cu ajutorul substituției $x = \frac{\pi}{4} + y$, aceasta se scrie

$$p \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + y \right) \right] = \sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + y \right).$$

Având în vedere că

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + y \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - y \right) = \\ &= 2 \sin \frac{\left(\frac{\pi}{4} + y \right) + \left(\frac{\pi}{4} - y \right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4} + y \right) - \left(\frac{\pi}{4} - y \right)}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos y = \sqrt{2} \cos y, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{4} + y \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + y \right) &= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2y \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2y \right) = \frac{1}{2} \cos 2y = \frac{1}{2} (\cos^2 y - \sin^2 y) = \\ &= \frac{1}{2} [\cos^2 y - (1 - \cos^2 y)] = \frac{1}{2} (2 \cos^2 y - 1). \end{aligned}$$

Ecuatia $p(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x$ se transformă, prin substituția $z = \cos y$ în ecuația echivalentă $\sqrt{2}pz = \frac{1}{2}(2z^2 - 1)$ sau $2z^2 - 2\sqrt{2}pz - 1 = 0$, care are rădăcinile

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + \sqrt{p^2 + 1}), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p - \sqrt{p^2 + 1}).$$

Este evident că pentru orice valoare reală a lui p ,

$$z_1 > 0 > z_2.$$

Deoarece este necesar ca $z_1 \leq 1$, $z_2 \geq -1$, parametrul p trebuie să satisfacă dubla inegalitate

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq p \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Se observă ușor că pentru valorile lui p care satisfac această condiție, rădăcinile z_1 și z_2 ale ecuației $2z^2 - 2\sqrt{2}pz - 1 = 0$ sînt distincte. Se găsesc astfel pentru y ($0 \leq y < 2\pi$) următoarele patru valori:

$$y_1 = \arccos z_1, \quad y_2 = 2\pi - \arccos z_1, \quad y_3 = \arccos z_2, \quad y_4 = 2\pi - \arccos z_2,$$

care sînt diferite între ele, cu excepția cazului $p = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, cînd numai două dintre ele sînt diferite. Aceasta se întîmplă pentru orice interval de forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ la care aparține y . Folosind substituția $x = y + \frac{\pi}{4}$, se obțin expresiile lui x . Studiul existenței și al numărului rădăcinilor a fost deja făcut.

134. Se cunoaște că lungimea razei cercului exînscriș în triunghi, tangent la latura sa de lungime a , este

$$r_a = \frac{s}{p - a},$$

s fiind aria, iar p semiperimetrul triunghiului (a se compara cu formula pentru lungimea razei cercului înscris în triunghi). În mod analog:

$$r_b = \frac{s}{p - b} \quad \text{și} \quad r_c = \frac{s}{p - c},$$

Înmulțind aceste egalități două câte două și folosind formula lui Heron, se găsește

$$r_a r_b = p(p - c), \quad r_b r_c = p(p - a), \quad r_c r_a = p(p - b).$$

Prin adunarea membru cu membru a ultimelor egalități, se obține

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2.$$

Deoarece $r_b r_c = p(p - a)$, rezultă $a = \frac{1}{p}(p^2 - r_b r_c) = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}.$

Latura a poate fi construită pe baza acestei egalități. În mod analog pot fi construite laturile b și c , iar cu ajutorul acestor laturi însuși triunghiul. Se observă că oricare ar fi razele cercurilor exinscrise, construcția poate fi realizată în mod unic.

Observație. Problema poate fi rezolvată mai simplu folosind asemănarea. Rezolvarea precedentă are însă avantajul că se obține cu ajutorul ei condiția posibilității construcției cerute.

135. Se observă ușor că acel corp convex care intervine în enunț poate avea numai forma reprezentată de fig. 66. Planele dreptunghiurilor egale vor fi considerate drept plane de coordonate, iar lungimile laturilor acestor dreptunghiuri se vor nota cu $2a$, respectiv cu $2b$ ($a \geq b$).

a) Din simetria corpului rezultă că volumul părții corpului, care se găsește în primul octant (de coordonate pozitive) este $\frac{1}{8}$ din volumul întregului corp. Însă

$$V_{OABCDEFG} = V_{OBDF} + V_{FABO} + \\ + V_{BCDO} + V_{DEFO}.$$

Corpul $OBDF$ este o piramidă triunghiulară regulată, cu muchia bazei $BD = DF = FB = \sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}$, iar muchiile laterale $OB = OD = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Se calculează ușor că volumul acestei piramide este

$$V_1 = \frac{1}{6}(a^3 + b^3),$$

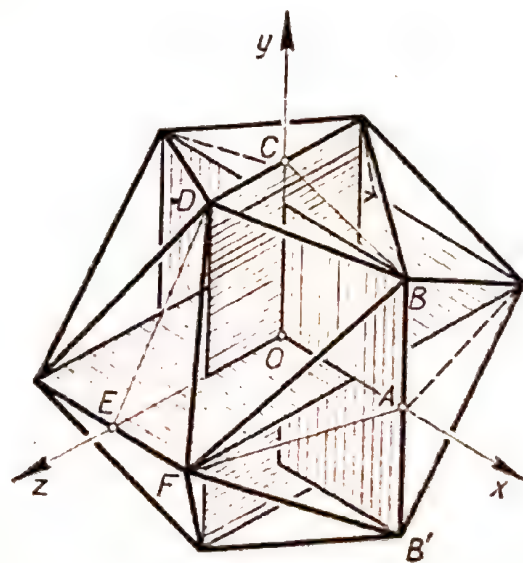


Fig. 66

iar volumul piramidei triunghiulare $FABO$

$$V_2 = \frac{1}{6} a^2 b.$$

Rezultate analoage se obțin calculând volumele piramidelor triunghiulare $BCDO$ și $DEFO$. În acest fel, volumul întregului corp

$$V = 8(V_1 + 3V_2) = \frac{4}{3} (a^3 + 3a^2b + b^3).$$

b) Condiția necesară și suficientă pentru ca poliedrul despre care este vorba să fie regulat este ca muchiile sale să aibă aceeași lungime, de exemplu $BD = BB'$, altfel spus

$$\sqrt{2(a^2 - ab + b^2)} = 2b,$$

ceea ce atrage după sine

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Aceasta înseamnă că latura mai mică a dreptunghiurilor trebuie să aibă aceeași lungime cu cel mai lung dintre segmentele în care se descompune latura mai lungă a dreptunghiurilor când se împarte în raportul „de aur”^{*}.

Observație. Dacă $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$, $a = \frac{b}{2} (\sqrt{5} + 1)$, înlocuind acest rezultat în formula obținută pentru V , se obține

$$V' = \frac{10}{3} (3 + \sqrt{5}) b^3,$$

ceea ce reprezintă volumul icosaedrului regulat de muchie $2b$.

136. Se notează cu x și y raza bazei conului, respectiv generatoarea acestuia. Volumul și aria conului vor fi $V = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}$ și $S = \pi xy$. Înlocuind valorile lui V și S în inegalitatea inițială, se găsește

$$4(x^4 y^2 - x^6) \leq \frac{8}{(\sqrt{3})^3} x^3 y^3,$$

* Un segment este împărțit în raportul „de aur” dacă se găsește pe el un punct astfel ca unul din cele două segmente astfel obținute să fie medie geometrică între segmentul inițial și celălalt segment (N.T.).

relație care devine, după împărțirea ambilor membri cu numărul pozitiv $4x^3y^3$,

$$\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3 \leq \frac{2}{(\sqrt{3})^3} \text{ sau } \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \frac{x}{y} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \geq 0. \quad (1)$$

Deoarece $\frac{x}{y} < 1$, se poate nota $\frac{x}{y} = \cos \varphi$, unghiul $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fiind format de generatoare cu raza bazei conului; inegalitatea (1) ia astfel forma

$$\cos^3 \varphi - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} - \cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0$$

sau

$$\left(\cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos^2 \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi - \frac{2}{3}\right) \geq 0.$$

Deoarece

$$\cos^2 \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi - \frac{2}{3} = \left(\cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\cos \varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

se obține

$$\left(\cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\cos \varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geq 0. \quad (2)$$

În inegalitatea (2) primul factor este totdeauna nenegativ, iar al doilea, pentru $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este tot timpul pozitiv. Parcurgând în ordine inversă operațiile făcute, se obține inegalitatea inițială. În (2) se obține egalitatea în cazul când $\cos \varphi = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

137. Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ cele două poligoane date P și P' , în care

$AB = DC = b$, $AD = BC = a$, $A'B' = D'C' = a'$, $A'D' = B'C' = b'$, $b' \leq AC$. Se construiește paralelogramul $A_1B_1C_1D_1$ notat cu P_1 , de laturi a și b' , echivalent cu P' , în modul următor (fig. 67). Se notează $A_1 = A'$, $D_1 = D'$ și ducându-se un cerc cu centrul în punctul A' și de rază a , se obține punctul B_1 ca intersecție a acestui cerc cu



segmentul $B'C'$ (aceasta este posibil deoarece $a' \leq a \leq b' < A'C'$). Se construiește, în fine, punctul C_1 astfel ca $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralelogram. Este evident că paralelogramul P' poate fi descompus în două părți din care se poate alcătui paralelogramul P_1 .

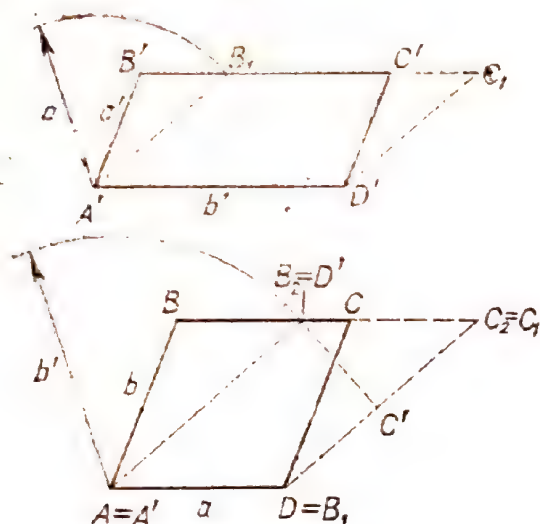


Fig. 67

În mod analog se construiește în continuare paralelogramul $A_2B_2C_2D_2$ notat cu P_2 , de laturi a și b' , care poate fi descompus în două părți care îl pot alcătui pe P . Se notează în acest scop $A_2=A$, $D_2=D$, descriindu-se apoi un cerc cu centrul în punctul A și de rază b' . Punctul B_2 se găsește la intersecția acestui cerc cu segmentul BC (aceasta este posibil deoarece $b \leq b' \leq AC$). Se construiește, în fine, punctul C_2 astfel ca $A_2B_2C_2D_2$ să fie paralelogram. Este evident că P poate fi descompus în două părți din care se poate forma P_2 .

Fiindcă prin construcție paraleloramele P_1 și P_2 sînt echivalente cu P' și P și au laturile a și b' , înseamnă că P_1 și P_2 sînt egale. S-a demonstrat astfel că paralelogramul P' poate fi descompus în patru părți, din care se poate forma paralelogramul P .

138. a) I. Fie două și numai două unghiuri drepte cu vîrfurile în A și situate în planul fețelor și anume $\angle CAD = \angle BAD = 90^\circ$ (fig. 68).

- 1) Fie fața ABC cel de-al treilea triunghi dreptunghic. Prin ipoteză $\angle BAC \neq 90^\circ$. Din motive de simetrie nu contează care din celelalte unghiuri ale feței ABC este drept. Dacă se consideră că acesta este $\angle ACB$, se obține

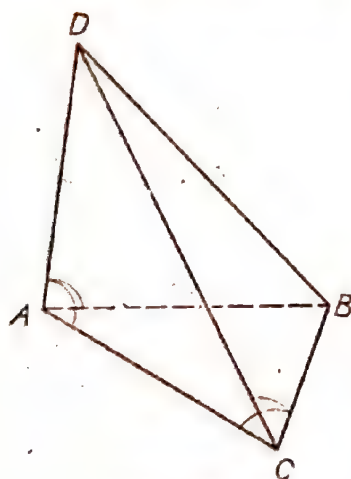


Fig. 68

$$\begin{aligned} BC^2 + CD^2 &= BC^2 + AC^2 + AD^2 = \\ &= AB^2 + AD^2 = DB^2, \end{aligned}$$

adică $\angle BCD = 90^\circ$.

- 2) Fie fața BCD cel de-al treilea triunghi dreptunghic. Dacă se presupune că $\angle BDC = 90^\circ$, se constată ușor că triunghiul ABC

este obtuz. (De exemplu, astfel : $BC^2 = CD^2 + DB^2 = DA^2 + AC^2 + AB^2 + DA^2 > AC^2 + AB^2$.) Din condițiile puse rezultă că aceasta nu este posibil.

Din motive de simetrie, este indiferent care din celelalte două unghiuri este drept. Fie acesta $\angle BCD$, deci

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 &= BD^2 - DC^2 + AC^2 = BD^2 - (DC^2 - AC^2) = \\ &= BD^2 - AD^2 = AB^2, \end{aligned}$$

adică $\angle ACB = 90^\circ$.

II. Se consideră că în nici un vîrf al tetraedrului $ABCD$ nu se îndeplinește condiția ca două și numai două dintre unghiurile fețelor să fie drepte.

1) Dacă trei fețe ale tetraedrului sînt triunghiuri dreptunghice cu vîrfurile drepte comune, cea de-a patra față este triunghi ascuțitunghic. Se stabilește, într-adevăr, cu ușurință, că pătratul oricărei laturi a celei de-a patra fețe este mai mic decît suma pătratelor celorlalte două laturi.

2) Fie trei dintre fețele tetraedrului triunghiuri dreptunghice avînd vîrfurile drepte necomune două cîte două. Se constată ușor că poziția reciprocă a fețelor în acest caz conduce la trei cazuri distincte : δ_1), δ_2) și δ_3), descrise în fig. 69.

Dacă se admite posibilitatea cazului δ_3), se găsește că orice muchie a tetraedrului este catetă a unui triunghi dreptunghic și de aceea este mai mică decît oricare altă muchie a tetraedrului, ceea ce nu este posibil, dacă se are în vedere că printre acestea se găsește una (sau mai multe) muchii de lungime maximă.

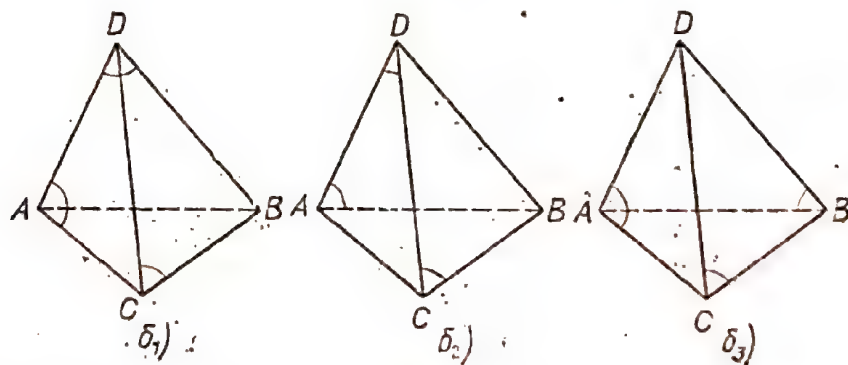


Fig. 9

Rămîn de studiat două cazuri :

δ_1) $\angle CAD = \angle BCD = \angle BDA = 90^\circ$;

δ_2) $\angle ADC = \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$.

Se consideră fața ABC . Conform ipotezei $\angle BAC \neq 90^\circ$ și $\angle ACB \neq 90^\circ$. Se presupune că $\angle ABC = 90^\circ$.
În cazul c_1) se obține

$$AC < CD < DB < AB < AC,$$

ceea ce nu este posibil.

În cazul δ_2) se găsește că centrul sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$ trebuie să coincidă cu mijloacele muchiilor AC și BD , muchii care nu au puncte comune. Rezultă că triunghiul ABC nu este dreptunghic.

b) Fie în tetraedrul $ABCD$ (fig. 68)

$$\angle ACB = \angle CAD = \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ.$$

Volumul tetraedrului se va exprima, evident, prin formula

$$V = \frac{1}{6} AC \cdot BC \cdot AD.$$

În continuare, este clar că cel puțin unul din segmentele AC , BC și AD este mai scurt decât celelalte muchii ale tetraedrului. Dacă cel de-al treilea din aceste segmente nu este mai scurt decât celelalte trei muchii, este satisfăcută una din inegalitățile $AB < AD$ sau $CD < BC$. Dacă se înlocuiește cel de-al treilea din aceste segmente cu cea mai scurtă dintre celelalte muchii, noul triplet de segmente va fi situat în același plan. În consecință AC , BC și AD sînt cele mai scurte muchii care nu sînt situate pe aceeași față.

139. Se vor lăsa la o parte persoanele care nu au nici un cunoscut în sală (și din această cauză ele însele nu sînt cunoscute de nimeni dintre cei prezenți). Dacă numărul lor ar fi mai mare sau egal cu doi, teorema ar fi demonstrată. Fie k numărul persoanelor care au cel puțin o cunoștință în sală. Este evident că numărul $k \geq 2$, fiecare putînd avea $1, 2, \dots, k-1$ cunoscuți, însă deoarece în sală se găsesc în total k astfel de persoane, este evident că cel puțin una din acestea are același număr de cunoscuți.

140. a) Pentru $k = 1$ inegalitatea (1) este evident îndeplinită. Pentru cazul general aceasta va fi demonstrată prin inducție. Astfel

$$\begin{aligned} N &= (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 + \\ &+ a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k). \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea (1) primului termen din partea dreaptă a egalității de mai sus, se obține

$$\begin{aligned} N &\leq k(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) + a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = \\ &= (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2) - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_k^2 - \\ &- ka_{k+1}^2 + 2a_1a_{k+1} + \dots + 2a_ka_{k+1} = (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots \\ &\dots + a_{k+1}^2) - (a_1 - a_{k+1})^2 - (a_2 - a_{k+1})^2 - \dots - (a_k - a_{k+1})^2. \end{aligned}$$

Se deduce imediat (1) pentru

$$N \leq (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k+1}^2).$$

b) Propoziția, evident, are loc pentru $k=1$. Pentru $k=n-1$, (1) are drept consecință:

$$\begin{aligned} |a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| &\leq \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2)} \leq \\ &\leq \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}. \end{aligned}$$

Ținând seama de (2), se obține

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

inegalitate din care rezultă $a_n \geq 0$. Schimbînd numerotarea numerelor, oricare din acestea se poate nota cu a_n și se poate arăta că este nenegativ. Propoziția este demonstrată.

141. Se notează mărimile unghiurilor din vîrfurile A, B, C ale triunghiului ABC cu α, β și γ . Se găsește astfel că

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{SA}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{SB}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{SC} \quad (1)$$

și, deoarece

$$SA \leq SB \leq SC, \quad (*)$$

are loc dubla inegalitate

$$\sin \frac{\alpha}{2} \geq \sin \frac{\beta}{2} \geq \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Unghiurile $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ fiind ascuțite, din (2) rezultă că

$$90^\circ > \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\beta}{2} \geq \frac{\gamma}{2} > 0^\circ,$$

adică

$$180^\circ > \alpha \geq \beta \geq \gamma > 0^\circ. \quad (3)$$

Folosind egalitatea $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ și inegalitatea (3), se obține $\alpha + \beta + \gamma \leq 3\alpha$, $\alpha + \beta + \gamma \geq 3\gamma$, $180^\circ \leq 3\alpha$, $180^\circ \geq 3\gamma$, adică

$$60^\circ \leq \alpha, 60^\circ \geq \gamma. \quad (4)$$

Rezultă că $\frac{\alpha}{2} \geq 30^\circ$ și din (1) se deduce că

$$SA = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2. \quad (5)$$

I. Toate vîrfurile A sînt situate pe cercuri cu centrul în S și raza mai mare decît 1 și mai mică sau egală cu 2 (fig. 70). Din (4) se deduce că $\frac{\gamma}{2} \leq 30^\circ$, iar din (1) că

$$SC = \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2. \quad (6)$$

II. Toate vîrfurile C sînt situate pe cercuri cu centrul în S și avînd razele mai mari sau egale cu 2. Pentru unghiul β se obține inegalitatea $0^\circ < \beta < 90^\circ$, adică $0^\circ < \frac{\beta}{2} < 45^\circ$. Se obține în acest caz din (2):

$$SB = \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} > \frac{1}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}. \quad (7)$$

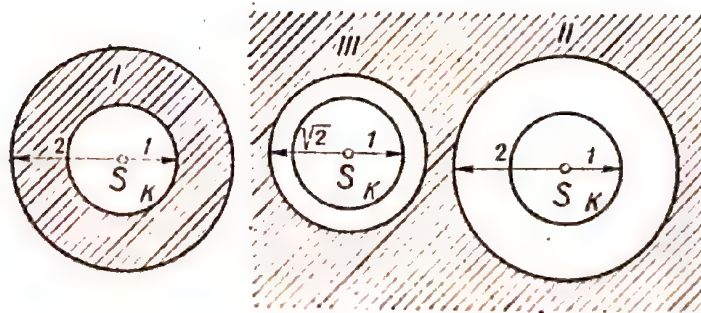


Fig. 70

III. Toate vîrfurile B se găsesc pe cercuri cu centrul în S , raza căroră este mai mare decît $\sqrt{2}$.

În toate trei cazurile studiate este adevărată și reciproca.

Dacă lungimea segmentului SA (SC , SB) satisface inegalitatea (5) [respectiv (6) sau (7)], punctul respectiv A (C , B) este vîrf al unui triunghi ABC pentru care se îndeplinește relația (*).

142. Fie $x, x+1, \dots, x+k$ cele $k+1$ numere întregi care se cer. Ecuația problemei este

$$x + (x+1) + \dots + (x+k) = N \quad \text{sau} \quad \frac{(x+x+k)(k+1)}{2} = N.$$

Se deduce că

$$x = \frac{N}{k+1} - \frac{k}{2}. \quad (1)$$

a) Întrucît $N = 550 = 2^2 \cdot 5^3$, relația (1) conduce la considerarea următoarelor două cazuri.

În cazul cînd k este par, pentru ca x să fie întreg, $k+1$ trebuie să fie egal cu 1, 5, 5^2 sau 5^3 . Astfel,

$$k_1 + 1 = 1, \quad x_1 = 500, \quad \div 500;$$

$$k_2 + 1 = 5, \quad x_2 = 98, \quad \div 98, 99, 100, 101, 102;$$

$$k_3 + 1 = 5^2, \quad x_3 = 8, \quad \div 8, 9, 10, \dots, 31, 32;$$

$$k_4 + 1 = 5^3, \quad x_4 = -58, \quad \div -58, -57, \dots, 65, 66.$$

În cazul cînd k este impar, pentru ca x să fie întreg, fracția $\frac{500}{k+1}$ trebuie să fie egală cu $m + \frac{1}{2}$ ($m \in \mathbb{Z}$). În consecință, $k+1$ trebuie să fie produs al factorului 2^3 cu 1, 5, 5^2 sau 5^3 . Se obțin:

$$k_5 + 1 = 2^3, \quad x_5 = 59, \quad \div 59, 60, \dots, 65, 66;$$

$$k_6 + 1 = 2^3 \cdot 5, \quad x_6 = -7, \quad \div -7, -6, \dots, 31, 32;$$

$$k_7 + 1 = 2^3 \cdot 5^2, \quad x_7 = -97, \quad \div -97, -96, \dots, 101, 102;$$

$$k_8 + 1 = 2^3 \cdot 5^3, \quad x_8 = -499, \quad \div -499, -498, \dots, 499, 500.$$

b) Relația (1) se poate scrie

$$x = \frac{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma}{k+1} - \frac{k}{2}.$$

Dacă numărul k este par, $k+1$ poate lua valorile impare 1, 3, $3^2, \dots, 3^\beta, 5 \cdot 1, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 3^\beta, 5^2 \cdot 1, \dots, 5^2 \cdot 3^\beta, \dots, 5^\gamma \cdot 1, 5^\gamma \cdot 3, \dots, 5^\gamma \cdot 3^\beta$, adică $(\beta+1)(\gamma+1)$ valori.

Acesta este numărul sumelor căutate.

În cazul când k este impar, pentru ca x să fie întreg, $\frac{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma}{k+1}$

trebuie să fie egal cu $m + \frac{1}{2}$

Prin urmare, $k+1$ poate lua valorile precedente, înmulțite fiecare cu $2^{\alpha+1}$, adică $(\beta+1)(\gamma+1)$ valori. Se obțin în final $2(\beta+1)(\gamma+1)$ sume. Exact jumătate din aceste sume vor fi compuse numai din numere naturale.

În fond, dacă din mulțimea de numere naturale $\{x, x+1, \dots, x+k\}$, a căror sumă este egală cu N , iar $x \geq 1$, se poate obține mulțimea de numere întregi $\{-x+1, \dots, 0, \dots, x-1, x, \dots, x+k\}$, avînd aceeași sumă (cînd $x=1$), se adaugă numai 0. Reciproc, dacă mulțimea începe cu un x negativ, $x=-y$ ($y>0$), atunci, întrucît $N \geq 1$, termenii pozitivi sînt mai mulți și

$$(-y) + (-y+1) + \dots + 0 + \dots + y + (y+1) + \dots$$

$$\dots + (y+k) = N = (y+1) + \dots + (y+k) = N.$$

Astfel, fiecărei mulțimi de numere naturale i se pune în corespondență numai o singură mulțime care începe cu un număr negativ sau cu zero. Prin urmare, numărul sumelor formate din numere naturale este $(\beta+1)(\gamma+1)$.

c) Dacă $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots m^\mu$, a, b, c, \dots, m fiind numere prime într-o succesiune crescătoare, iar $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ numere naturale, se consideră două cazuri.

1) $a=2$. Prin raționamente analoage celor de mai sus se stabilește în acest caz că numărul mulțimilor căutate este $2(\beta+1) \dots (\mu+1)$.

2) $a>2$, iar numărul N este impar. Se stabilește, analog ca mai sus, că numărul mulțimilor căutate este $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \dots (\mu+1)$.

143. a) Din formula binomului lui Newton se deduce, pentru numerele reale pozitive a și b ,

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b, \text{ deci } (n+1)^n > 2 \cdot n^n.$$

Puterea a zecea a acestei inegalități se serie

$$(n+1)^{10^n} > 2^{10} n^{10^n} > 1000 \cdot n^{10^n}.$$

Logaritmind această inegalitate, se obține

$$\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n.$$

b) Inegalitatea obținută se transcrie sub forma

$$\lg(k+1) > \frac{3}{10k} + \lg k.$$

Însumind inegalitățile de acest tip de la $k=1$ la $k=m-1$ și având în vedere că $\lg 1 = 0$, iar termenii $\lg 2, \lg 3, \dots, \lg(m-1)$ care se găsesc în ambii membri ai inegalității se reduc, se găsește că

$$\lg m > \frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} \right).$$

Dacă se însumează inegalitățile de forma celei de mai sus de la $m=2$ la $m=n$, se obține

$$\begin{aligned} \lg n! = \lg 2 + \lg 3 + \dots + \lg n &> \frac{3}{10} \left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \dots \right. \\ &\dots + \left. \frac{n-(n-1)}{n-1} \right) = \frac{3}{10} \left[n \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - \right. \\ &\left. - (n-1) \right] > \frac{3n}{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - 1 \right), \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

144. Membrul întâi al ecuației [care se notează cu $f(x)$] reprezintă diferite funcții algebrice pe intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$. Membrul întâi este dat de o funcție pară, strict pozitivă, $f(x) = f(-x) > 0$. Membrul al doilea este dat de o funcție impară. Aceasta ia valori de semne contrare pe cele două semiaxe, pozitivă și negativă, ale axei reale. De aceea, dacă $m \geq 0$, este suficient să se considere numai valorile pozitive ale lui x , studiindu-se problema pe intervalele $(0, 1)$, $(1, 2)$ și $(2, +\infty)$.

Reciproc, pentru $m = -t < 0$, nu există rădăcini ale ecuației situate pe semiaxa pozitivă, iar rădăcinile ecuației aflate pe semiaxa negativă sînt egale în modul și de semn contrar cu rădăcinile ecuației pentru $m = t > 0$.

Fie astfel $m \geq 0$. Pe intervalul $(0, 1)$ ecuația este $5 - 2x^2 = mx$, iar rădăcinile acesteia sînt $x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$. O singură rădă-

cină din acestea este pozitivă, $x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 40}}{4}$, care este acceptabilă dacă $x_1 < 1$, cînd $f(1) = 3 < m$, adică pentru $m > 3$.

Dacă $x = 1$, rezultă $m = 3$, deci $x = 1$ este rădăcină a ecuației pentru $m = 3$.

Pe intervalul $(1, 2)$ ecuația are forma $mx = 3$. Singura rădăcină a acestei ecuații este $x = \frac{3}{m}$. Rădăcina este acceptabilă dacă $1 < \frac{3}{m} < 2$ sau dacă $\frac{3}{2} < m < 3$.

Dacă $x = 2$, rezultă că $2m = 3$, deci $x = 2$ este rădăcină a ecuației pentru $m = \frac{3}{2}$.

Pe intervalul $(2, +\infty)$ ecuația ia forma $2x^2 - 5 = mx$, avînd rădăcinile $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$. O singură rădăcină dintre acestea este pozitivă, $x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4}$. Pentru ca $x_1 > 2$, $f(2) = 3 < 2m$, adică $m > \frac{3}{2}$.

a) Dacă m este pozitiv, ecuația admite rădăcini pentru $m \geq \frac{3}{2}$.

Pentru $m = \frac{3}{2}$ există o singură rădăcină: $x = 2$, iar pentru $m > \frac{3}{2}$ ecuația are două rădăcini: $0 < x_1 < 2$ și $x_2 > 2$. Dacă m este negativ, se obține întru totul analog că pentru $m \geq -\frac{3}{2}$ nu există rădăcini, pentru $m = -\frac{3}{2}$ rădăcina este unică: $x = -2$, iar pentru

$m < -\frac{3}{2}$ ecuația are două rădăcini: $0 > x_1 > -2$ și $x_2 < -2$.

b) Rădăcina $x = 1$ se obține pentru $m = 3$, găsindu-se astfel perechile $(1, 3)$ și $(-1, -3)$.

Rădăcinii $x = 2$ îi corespunde valoarea fracționară $m = \frac{3}{2}$.

În continuare trebuie verificate numerele întregi x mai mari ca 2. Acestea trebuie să fie rădăcini ale ecuației $2x^2 - 5 = mx$. Rezultă că $5 = x(2x - m)$, ambii factori x și $2x - m$ fiind întregi. Deoarece $x > 0$, binomul $2x - m$ este de asemenea pozitiv. Numărul 5 este însă prim și se scrie numai în două moduri ca produs de factori pozitivi: $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1$.

Prima descompunere conduce la $x = 1$, ceea ce nu convine, fiindcă s-au considerat valori $x > 2$.

Cea de-a doua descompunere implică $x = 5$ și, în consecință, $m = 9$. Se obțin pe această cale încă două perechi: $(5, 9)$ și $(-5, -9)$. Nu există alte perechi de numere întregi (x, m) .

145. Din enunț se deduce că $\alpha = \alpha_1$ ($\alpha = \hat{A}$, $\alpha_1 = \hat{A}_1$) și

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a_1+c_1}{b_1} = 2. \quad (1)$$

Din teorema sinusurilor se deduce ușor formula:

$$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha+\gamma}{2}} \quad (\gamma = \hat{C}, \gamma_1 = \hat{C}_1).$$

Folosind această formulă, se găsește din (1):

$$\frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha+\gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha_1-\gamma_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_1+\gamma_1}{2}}, \quad (2)$$

relație din care rezultă imediat

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}}.$$

Aducînd egalitatea obținută la o formă mai simplă, se găsește

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}$$

și fiindcă $\alpha = \alpha_1$ înseamnă că $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$, deci $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}$.

Deoarece γ și γ_1 sînt unghiuri ale triunghiului, $0 < \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ și $0 < \frac{\gamma_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ și în consecință $\gamma = \gamma_1$, adică $\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C_1$.

146. Fie T punctul de tangență al celor două cercuri (fig. 71), triunghiul echilateral ABC înscris ca în enunț și CP cea mai lungă dintre tangentele AM , BN , CP . Se notează cu D , E și F punctele de intersecție ale dreptelor AT , BT și CT cu cercul mai mic. Se va arăta că $AM + BN = CP$. Se obține:

$$AM^2 = AD \cdot AT, \quad (1)$$

$$BN^2 = BE \cdot BT, \quad (2)$$

$$CP^2 = CF \cdot CT. \quad (3)$$

Împărțind relațiile (1) și (2) prin relația (3), se găsește

$$\frac{AM^2}{CP^2} = \frac{AD \cdot AT}{CF \cdot CT}, \quad (4) \quad \frac{BN^2}{CP^2} = \frac{BE \cdot BT}{CF \cdot CT}. \quad (5)$$

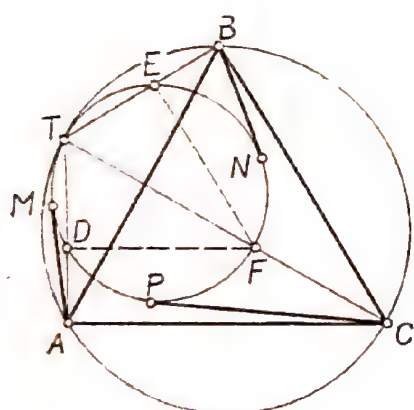


Fig. 71

Cele două cercuri sînt omotetice avînd punctul T drept centru de omotetie. În această omotetie punctele D , E și F ale cercului mic se transformă în punctele A , B , C ale cercului mare. Rezultă din aceasta că $DF \parallel AC$, $EF \parallel BC$, deci

$$\frac{AD}{FC} = \frac{AT}{CT}, \quad \frac{BE}{CF} = \frac{BT}{CT}.$$

Egalitățile (4) și (5) se aduc la forma

$$\frac{AM}{CP} = \frac{AT}{CT}, \quad \frac{BN}{CP} = \frac{BT}{CT}.$$

Prin adunarea acestor egalități se găsește

$$\frac{AM + BN}{CP} = \frac{AT + BT}{CT}. \quad (6)$$

Punctul T se află pe arcul AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC . Din această cauză $AT + BT = CT$. În consecință $\frac{AM + BN}{CP} = 1$ și $AM + BN = CP$.

147. Se observă imediat două soluții ale acestei ecuații: $x = 3$, $y = 1$ și $x = 5$, $y = 3$.

Se va demonstra că nu există alte soluții. Pentru $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, evident nu se obțin soluții. Se presupune că o pereche de numere întregi pozitive (x, y) , astfel ca $x > 5$, satisface ecuația

$$2^x = 3^y + 5.$$

În acest caz membrul întâi al ecuației este divizibil prin 64. Membrul al doilea trebuie să fie de asemenea divizibil cu 64.

Prin împărțirea lui 3^n la 64 se obțin pentru $n = 1, 2, \dots, 16$ resturile următoare:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
restul	3	9	27	17	51	25	11	33	35	41	59	49	19	57	43	1

Fiindcă restul împărțirii lui 3^{16} la 64 este 1, resturile împărțirii lui 3^n la 64 se vor repeta cu perioada 16. De aceea y trebuie să aibă forma $y = 11 + 16k$. Se va arăta că o astfel de soluție nu există deoarece după înlocuirea corespunzătoare membrul întâi și cel de-al doilea al ecuației dau resturi diferite prin împărțire la 17.

Se găsește ușor că restul împărțirii lui 3^{16} la 17 este 1, deci restul împărțirii lui 3^y la 17 este același ca și restul împărțirii lui 3^{11} la 17, adică 7. Trebuie demonstrat însă și faptul că prin împărțirea lui 2^x la 17 nu se obține niciodată restul 12.

Pentru $n = 1, 2, \dots, 8$ se obțin următoarele resturi ale împărțirii lui 2^n la 17:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
restul	2	4	8	16	15	13	9	1

Deoarece prin împărțirea lui 2^8 la 17 se obține restul 1, resturile se repetă cu perioada 8. Restul 12 nu se obține în nici un caz.

148. Dacă x_i ($i = 1, 2, 3$) sînt rădăcinile raționale ale polinomului dat, este evident că $y_i = ax_i$ este rădăcină rațională a polinomului $y^3 + by^2 + acy + a^2d$. Se demonstrează ușor că orice rădăcină rațională a unui polinom cu coeficienți întregi și avînd coeficientul dominant egal cu 1 este întreagă. Astfel y_1 , y_2 și y_3 sînt numere întregi, toate trei fiind divizori ai numărului impar a^2d , ceea ce înseamnă că sînt impare. Suma lor b și suma produselor de cîte două ac trebuie să fie numere impare, adică atît b cît și c sînt numere impare, ceea ce contrazice ipoteza că bc este par.

149. Fie E și F mijloacele diagonalelor AC și BD , iar G centrul de greutate al triunghiului BCD (fig. 72). Se va demonstra că punctul M în care se intersectează dreptele AG și EF este mijlocul lui EF . Într-adevăr, dacă H este mijlocul lui CG , deoarece $AE = EC$, înseamnă că segmentul EH este paralel cu AG , și fiindcă $FG = GH$, rezultă că $FM = ME$. Se obține astfel că $MG = \frac{1}{2} EH = \frac{1}{4} AG$.

Se consideră în continuare omotetia cu centrul în punctul M și raport $-\frac{1}{3}$. Analog ca și pentru punctul G , se demonstrează că

toate cele patru centre de greutate se găsesc pe cercul în care se transformă prin omotetie cercul inițial.

150. Fie M, N, P, Q (fig. 73) mijloacele laturilor patrulaterului înscris dat iar S punctul în care se intersectează dreptele MP și NQ . Patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram cu centrul în S fiindcă punctele M și N , P și Q sînt simetrice față de S . Perpendicularele duse din M, N, P și Q pe laturile respective sînt concurente în punctul T , centrul cercului circumscris. Perpendicularele duse prin M, N, P, Q pe laturile opuse sînt paralele cu perpendicularele duse în punctele M, N, P și Q pe aceste laturi, de aceea se vor intersecta într-un punct T' simetric cu punctul T față de S .

151. Fie două cercuri care sînt tangente între ele și la cele două cercuri concentrice date. Diametrul d al fiecăruia dintre aceste cercuri este egal cu $R - r$. Se notează cu n numărul maxim de cercuri care pot fi așezate în această coroană circulară. Se observă ușor că $n = \left[\frac{\pi}{\varphi} \right]$ ($\varphi = \angle O_1OK$) (fig. 74), $[x]$ fiind partea întreagă a lui x .

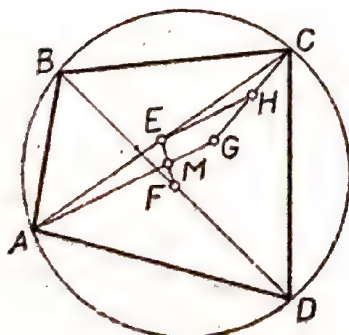


Fig. 72

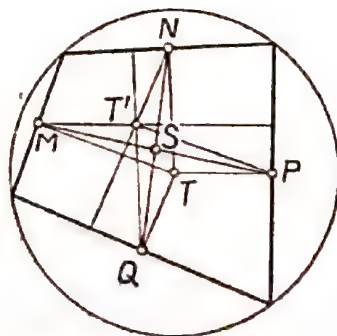


Fig. 73

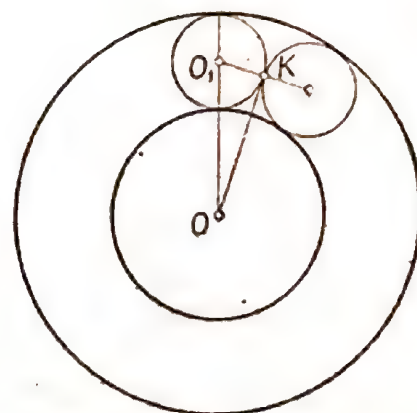


Fig. 74

Din ΔOO_1K se găsește

$$\frac{R-r}{2} = \frac{R+r}{2} \sin \varphi, \quad (*)$$

ceea ce înseamnă că $\varphi = \arcsin \frac{R-r}{R+r}$, deci

$$n = \left[\frac{\pi}{\arcsin \frac{R-r}{R+r}} \right].$$

Din (*) se obține $\frac{R-r}{R+r} = \sin \varphi$, deci

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \text{ sau } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Se deduce astfel

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{R} - \sqrt{r}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}}.$$

Dacă se consideră dubla inegalitate $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, se obține rezolvarea problemei. Rezultă din această inegalitate că

$$\frac{R-r}{R+r} < \varphi \text{ și } \frac{\varphi}{2} < \frac{\sqrt{R} - \sqrt{r}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}},$$

iar de aici

$$n \leq \pi \frac{R+r}{R-r} \text{ și } n+1 > \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}}$$

sau

$$n < 3,15 \cdot \frac{R+r}{R-r} = \frac{63}{20} \cdot \frac{R+r}{R-r} \text{ și } n+1 > \frac{\sqrt{R} + \sqrt{r}}{\sqrt{R} - \sqrt{r}} \cdot \frac{3}{2}.$$

152. Fie x o rădăcină a ecuației (1). În acest caz expresiile

$$y = x^2 + 2px - p^2 \text{ și } z = x^2 - 2px - p^2 \quad (2)$$

verifică condițiile $y > 0$, $z \geq 0$, $y > z$.

Din ecuația (1) se obțin succesiv cu ajutorul notațiilor (2):

$$\sqrt{y} - \sqrt{z} = 1, \quad y - z - 1 = 2\sqrt{z},$$

$$4px - 1 = 2\sqrt{z}, \quad (3)$$

$$(4px - 1)^2 = 4z, \quad (3')$$

$$1 + 4p^2 = 4x^2(1 - 4p^2). \quad (4')$$

În afară de condiția $p > 0$, este necesară deci și $1 - 4p^2 > 0$, adică

$$0 < p < \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Deoarece $y > z$, adică $4px > 0$, este îndeplinită și inegalitatea $x > 0$. Din relația (4') rezultă astfel

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + 4p^2}{1 - 4p^2}}. \quad (5)$$

Verificare. Din relația (5) rezultă relația (4') și astfel se deduce (3'). Din această cauză $z \geq 0$. Pentru a putea ajunge de la (3') la (3) este necesar și suficient ca $4px - 1 \geq 0$, adică

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + 4p^2}{1 - 4p^2}} \geq \frac{1}{4p}. \quad (6)$$

Din relațiile (6) și (7) rezultă

$$\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{2} - 1} \leq p < \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Fiindcă $y = z + 4px$ și $4px > 0$, înseamnă că $y > 0$. În acest mod se obține din relația (3) relația (1). Ecuația (1), în condițiile (7) are o singură rădăcină reală, dată de formula (5).

153. 1) Fie n par. Se calculează numărul triunghiurilor obtuzunghice în vârful A_1 , adică numărul triunghiurilor $A_1A_jA_k$ ($j < k$).

Condiția $\angle A_kA_1A_j > \frac{\pi}{2}$ este echivalentă cu condiția $k - j > \frac{n}{2}$.

Se va calcula numărul perechilor de numere naturale (j, k) pentru cazul cînd $2 \leq j < k \leq n$ și $k - j > \frac{n}{2}$. Dacă j ia valorile $2, 3, \dots$

$\dots, \frac{n}{2} - 1$, se poate pune în corespondență fiecărui j numărul k ales în $\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 3, \dots, 1$ moduri, adică numărul tuturor perechilor este

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2} - 2\right) + \left(\frac{n}{2} - 3\right) + \dots + 1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} - 2\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) = \\ &= \frac{1}{8} (n - 2)(n - 4). \end{aligned}$$

Acesta este numărul triunghiurilor obtuzunghice în vârful A_1 , numărul total al acestor triunghiuri fiind $\frac{1}{8} n(n - 2)(n - 4)$.

2) Fie n impar. Se calculează și pentru acest caz numărul triunghiurilor $A_1 A_j A_k$ obtuzunghice în A_1 . Se găsește inegalitatea $k - j > \frac{n - 1}{2}$. Numărul perechilor (j, k) astfel încît $2 \leq j < k \leq n$

și $k - j > \frac{1}{2}(n - 1)$ este

$$\frac{1}{2}(n - 3) + \frac{1}{2}(n - 5) + \dots + 1 = \frac{1}{8}(n - 1)(n - 3),$$

în total găsindu-se $\frac{1}{8} n(n - 1)(n - 3)$ triunghiuri.

În acest fel, numărul triunghiurilor obtuzunghice pentru n par este $\frac{1}{8} n(n - 2)(n - 4)$, iar pentru n impar este $\frac{1}{8} n(n - 1)(n - 3)$.

154. Se consideră următoarele $n + 1$ numere :

$$0, a_1^2, a_1^2 + a_2^2, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \dots, a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Printre aceste numere se găsesc cel puțin două, de exemplu $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_j^2$, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$ ($j < k$), avînd aceleași resturi la împărțirea prin n , deci $a_{j+1}^2 + a_{j+2}^2 + \dots + a_k^2$ este divizibil prin n .

155. a) 1. Se notează punctele date A, B, C, D, E (fig. 75) și se presupune că din punctul A ies trei segmente roșii*, fie acestea $AB,$

* În figurile 75, 76, 77 segmentele roșii sînt notate cu linii continue.

AC, AD . Conform enunțului segmentele BC, DB, CD trebuie să fie albastre* și, prin urmare, $\triangle DBC$ are toate laturile albastre, ceea ce contrazice enunțul.

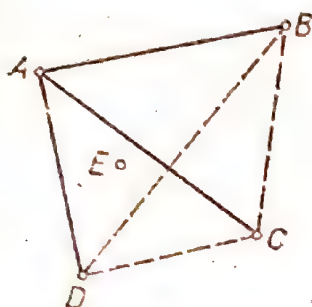


Fig. 75

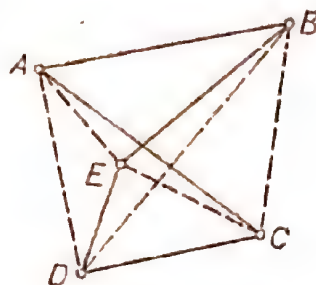


Fig. 76

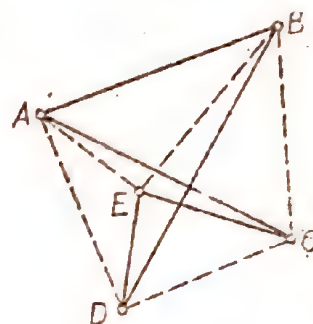


Fig. 77

2. Dacă din punctul A ies două segmente AB și AC de aceeași culoare, fie aceasta roșie, segmentele AD și AE vor fi albastre (v. fig. 75).

Din enunțul problemei rezultă că segmentul BC este albastru, iar segmentul DE roșu. Din punctul D iese încă un segment roșu, fie CD (fig. 75), fie DB (fig. 76).

În ambele cazuri culoarea celorlalte segmente este unic determinată.

b) Linia cerută este $ABEDCA$ sau $ADBCEA$ (fig. 75) și $ABDECA$ sau $ADCBEA$ (fig. 76).

156. Este evident că pot fi așezate zece rânduri paralele de câte zece sfere fiecare, adică 100 sfere. Numărul sferelor poate fi însă mărit, dacă pe primul rând se așază 10 sfere, pe al doilea 9 sfere, astfel încât fiecare sferă din al doilea rând să fie tangentă la două sfere din primul rând, ș.a.m.d. Atunci înălțimea comună a rândurilor așezate este $H = 2r + r(n-1)\sqrt{3}$, n fiind numărul de rânduri.

Întrucât $H \leq 10$, pentru $r = \frac{1}{2}$ se obține $n \leq 6\sqrt{3} + 1$, adică $n = 11$.

Dacă se așază în rândurile I, III, V, VII, IX, XI câte 10 sfere, iar în rândurile II, IV, VI, VIII, X câte nouă sfere, s-au așezat în total 105 sfere.

Rămâne astfel o diferență de înălțime egală cu $9 - 5\sqrt{3}$. Se caută în continuare să se înlocuiască un rând de 9 sfere cu unul de 10 sfere. Prin o astfel de înlocuire înălțimea unui rând va crește cu $4r - 2r\sqrt{3} = r(4 - 2\sqrt{3})$.

* În aceleași figuri segmentele albastre sînt notate cu linii punctate.

Pentru $n = 11$ și $r = \frac{1}{2}$ se obține că numărul k rândurilor astfel înlocuite satisface inegalitatea $k(2 - \sqrt{3}) \leq 9 - 5\sqrt{3}$, adică $k \leq 3 - \sqrt{3}$, deci $k = 1$. Din această cauză un singur rând de nouă sfere poate fi înlocuit cu un rând de 10 sfere.

Se pot așeza în acest mod 106 sfere.

Observație. Problema nu a fost dată la olimpiadă, deoarece demonstrația riguroasă a faptului că $N = 106$ constituie numărul maxim de bile care pot fi așezate este anevoioasă.

157. Se spune că o literă este de prima speță, dacă aceasta intervine o singură dată în cuvânt. În caz contrar va fi numită literă de speța a doua. Literele care sînt alăturate unei litere de speța a doua sînt diferite (aceasta rezultă din proprietatea b).

Dacă cuvîntul conține cel puțin două feluri de litere, el conține cel puțin o literă de prima speță. În caz contrar s-ar obține din acesta cuvîntul abab, ceea ce contravine enunțului. Eliminînd dintr-un cuvînt scris cu ajutorul tuturor n literelor pe cele de speța a doua care coincid cu o literă determinată, se găsește un cuvînt format din $n - 1$ litere. Eliminînd mai departe literele de speța a doua succesiv, se ajunge la un cuvînt scris numai cu litere de prima speță.

Se demonstrează prin inducție completă că un cuvînt nu poate avea lungimea mai mare de $2n - 1$ litere. Pentru $n = 1$ afirmația este adevărată. Se presupune că este adevărată și pentru un alfabet compus din $n = k$ litere și se va demonstra că rămîne adevărată și pentru un alfabet avînd $n = k + 1$ litere.

Fie un cuvînt în care intră cea de-a $(k + 1)$ -a literă (diferită de primele k), litera de prima speță α , iar β este litera alăturată acesteia. Dacă β este literă de prima speță, prin ștergerea sa rămîne un cuvînt format din k litere diferite a cărui lungime maximă nu depășește $2k - 1$ litere, cuvîntul inițial avînd astfel o lungime de cel mult $2k$ litere. Dacă β este literă de cea de-a doua speță, se observă ușor că sau ambele litere care sînt alăturate perechii α, β sînt distincte, sau nu există decît o literă alăturată perechii, aceasta fiind situată în consecință la extremitatea cuvîntului.

Din această cauză prin ștergerea perechii α, β rămîne un cuvînt care satisface condiția a) din enunț. Lungimea maximă a cuvîntului rămas este de $2k - 1$ litere, iar a celui inițial de $2k - 1 + 2 = 2(k + 1) - 1$ litere.

Un exemplu de cuvânt avînd $2n - 1$ litere, scris cu alfabetul a_1, a_2, \dots, a_n , este

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1.$$

158.

$$f(a, b, c) = \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c} + \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}.$$

Se observă că $|x - y| + x + y = 2 \max(x, y)$. De aceea

$$f(a, b, c) = \left| 2 \max \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) - \frac{2}{c} \right| + 2 \max \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) + \frac{2}{c}.$$

Făcînd aceeași observație,

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= 2 \max \left[2 \max \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right) \frac{2}{c} \right] = \\ &= 4 \max \left[\max \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \right), \frac{1}{c} \right] = 4 \max \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

159. Se consideră segmentul MN care separă din $\triangle ABC$, $\triangle AMN$ de arie jumătate din aria triunghiului ABC (fig. 78). Se notează $AN = x$, $AM = y$, obținîndu-se

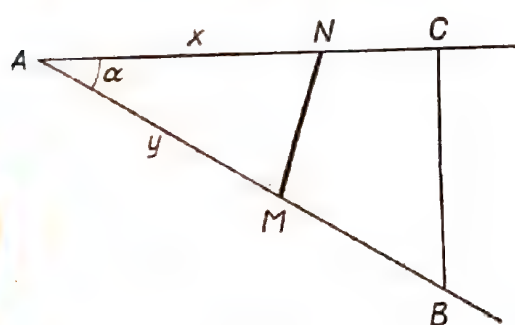


Fig. 78

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} xy \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

și, în continuare,

$$2xy = bc. \quad (1)$$

Lungimea $MN = d_a$ se calculează folosind teorema cosinusului:

$$\begin{aligned} d_a^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = (x - y)^2 + 2xy(1 - \cos \alpha) = \\ &= (x - y)^2 + bc(1 - \cos \alpha) \geq bc(1 - \cos \alpha) = \bar{d}_a^2. \end{aligned} \quad (2)$$

În mod analog se găsește că $d_b^2 \geq \bar{d}_b^2$ și $d_c^2 \geq \bar{d}_c^2$. Pentru a exprima \bar{d}_a^2 prin aria și laturile triunghiului ABC , se găsește mai întâi $1 - \cos \alpha$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos \alpha),$$

deci

$$1 - \cos \alpha = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}.$$

Prin înlocuirea acestei expresii în relația (2) se obține

$$\bar{d}_a^2 = \frac{1}{2} [a^2 - (b - c)^2] = 2(p - b)(p - c) = \frac{2S^2}{p(p - a)}, \quad (3)$$

p fiind semiperimetrul triunghiului, iar S aria înlocuită din formula lui Heron. Efectuând în formula (3) permutarea circulară a lungimilor a , b , c , se obțin

$$\bar{d}_b^2 = \frac{2S^2}{p(p - b)} \text{ și } \bar{d}_c^2 = \frac{2S^2}{p(p - c)}. \quad (3')$$

Dacă se presupune că $a \leq b \leq c$, din (3) și (3') se obține dubla inegalitate:

$$\bar{d}_a^2 \leq \bar{d}_b^2 \leq \bar{d}_c^2.$$

Astfel, \bar{d}_a^2 va fi mai mică decât \bar{d}_b^2 și \bar{d}_c^2 . Mai trebuie arătat că punctele M și N sînt situate pe laturile triunghiului și nu pe prelungirile lor, adică $x = y < b$. Pentru $x = y$ din egalitatea (1) se obține că $2x^2 = bc$, deci $x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Din inegalitățile $a \leq b \leq c$ și din inegalitatea triunghiului $c < a + b$ se deduce că $c < 2b$, adică

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leq c.$$

Discuție. Dacă $a < b$, există un singur segment de lungime minimă egală cu \bar{d}_a . Dacă $a = b < c$, există două segmente de lungime minimă egală cu $\bar{d}_a = \bar{d}_b$. În caz că triunghiul este echilateral există trei segmente de lungime minimă dată de $\bar{d}_a = \bar{d}_b = \bar{d}_c$.

160. Ochiul observatorului percepe imaginea lumînării fie direct, fie prin intermediul unei raze luminoase reflectate de o oglindă, fie prin intermediul unei raze luminoase care suferă mai multe reflexii. La fiecare reflexie unghiul de incidență al razei pe oglindă

este egal cu unghiul de reflexie. Proiectând această configurație de raze pe planul care conține ochiul P al observatorului și este perpendicular pe muchia unghiului diedru, egalitatea unghiurilor de incidență cu unghiurile de reflexie ale razelor se păstrează. Este suficient deci să se considere problema în acest plan. Fie semidreptele OX și OY intersecțiile acestui plan cu planul oglinzilor a , respectiv b . Se consideră o rază luminoasă care se reflectă succesiv pe cele două oglinzi, ultima reflexie având loc pe oglinda a . Punctele de incidență pe cele două oglinzi ale razei reflectate succesiv se notează în ordinea inversă propagării razei, adică începând de la ochiul P al observatorului. Fie acestea $A_1, B_2, A_3, \dots, C_n$ astfel încât lumina parcurge între lumânare și ochiul observatorului linia poligonală $SC_n \dots A_3 B_2 A_1 P$. Se găsește în continuare punctul în care se află imaginea virtuală a lumânării. Este clar că acest punct este situat pe dreapta PA_1 . Unghiul XOY și fragmentul de linie poligonală de la A_1 la S conținut în acesta se transformă printr-o simetrie față de dreapta OX , obținându-se astfel o nouă linie poligonală

$$PA_1 B_2^{(1)} A_3^{(1)} \dots C_n^{(1)} S^{(1)}. \quad (1)$$

Pe baza legilor reflexiei $\sphericalangle PA_1 X = \sphericalangle B_2 A_1 O$, iar $\sphericalangle B_2 A_1 O = \sphericalangle B_2^{(1)} A_1 O$ din cauza simetriei, ceea ce înseamnă că punctul $B_2^{(1)}$ se află pe dreapta PA_1 . Se ia în continuare simetricul unghiului $Y_1 O X$ și al fragmentului de linie poligonală conținut în acesta $B_2^{(1)} A_3^{(1)} \dots C_n^{(1)} S^{(1)}$ față de dreapta OY_1 , simetrica dreptei OY în simetria precedentă. Se obține în acest mod linia poligonală $PA_1 B_2^{(1)} A_3^{(2)} \dots C_n^{(2)} S^{(2)}$ al cărei fragment de la P la $A_3^{(2)}$ este un segment. Se continuă în acest fel construcția pînă cînd întreaga linie poligonală se desfășoară sub forma unui segment $PS^{(n)}$.

Modul în care se găsesc imaginile este următorul. Se găsește simetricul punctului S față de una dintre dreptele OZ_1 , fie acesta $S^{(1)}$, apoi simetricul $S^{(2)}$ al lui $S^{(1)}$ față de dreapta OZ_2 care face un unghi de 2α cu cea inițială, și se continuă astfel pînă cînd se obține punctul $S^{(n)}$, simetricul lui $S^{(n-1)}$ față de dreapta OZ_{n-1} care formează cu dreapta inițială unghiul $(n-1)\alpha$. Se duce apoi segmentul $PS^{(n)}$ și se verifică dacă intersectează toate semidreptele $OZ, OZ_1, \dots, OZ_{n-1}$. Dacă le intersectează, $S^{(n)}$ este imagine (se verifică parcurgînd în sens invers operațiile făcute). Cazul în care acest segment nu taie nici una din semidreptele de mai sus nu poate avea loc (v. construcția imaginilor). Se face următoarea observație evidentă. Fie semidreptele OM și ON , care formează un unghi mai mic decît unghiul diedru, și semidreapta OP situată între OM și ON . Se notează cu OQ semidreapta aflată în prelungirea lui OP . În acest caz orice dreaptă

care nu trece prin punctul O nu poate intersecta simultan toate trei semidrepte OM , ON și OQ . De aceea, construcția simetricelor succesive ale punctului S și ale unghiului XOY se încheie când prelungirea OF a semidreptei OP intră în unghiul $Z_{n-1}OZ_n$. Segmentul $PS^{(n+1)}$ nu poate intersecta semidreapta OZ_n și pe toate semidreptele precedente. Unghiurile XOY , XOZ_1 , $Z_{n-1}OZ_n$ și unghiurile construite de cealaltă parte Z_1OY , $Z_{-(k-1)}OZ_{-k}$ acoperă întreg planul, iar $Z_{n-1}OZ_n$ și $Z_{-(k-1)}OZ_{-k}$ se suprapun. De aceea numărul imaginilor nu depășește $\left[\frac{2\pi}{\alpha} \right] + 1$.

Numărul imaginilor poate fi și mai mic, în funcție de așezarea luminării și a observatorului, din cauza imaginii din unul sau ambele unghiuri externe, dar nu poate scădea sub $\left[\frac{2\pi}{\alpha} \right] - 1$.

Amănuntele care urmează depind nu numai de poziția luminării și a observatorului, ci și de paritatea numărului $\left[\frac{2\pi}{\alpha} \right]$. Dacă $\alpha =$

$= \left[\frac{\pi}{n} \right]$ iar n este întreg, pentru orice poziție a observatorului și a luminării sînt vizibile exact $2n$ imagini (socotind și lumina în însăși, ca de altfel și în deducțiile anterioare). Întregul plan este împărțit în acest caz în $2n$ unghiuri. Unghiul $X'OY'$ opus la vîrf cu unghiul XOY este critic. În acest caz punctele $S^{(n)}$ și $S^{(-n)}$ coincid. $S^n \equiv S^{(-n)} \equiv S^0$ sau cînd n este par, ocupînd în $X'OY'$ aceeași poziție ca și în XOY , sau pentru n impar pe cea simetrică. Din această cauză fie se observă imaginea în oglinda OX cînd segmentul PS^0 intersectează pe OX , fie în oglinda OY cînd segmentul PS^0 intersectează pe OY .

161. Dacă patrulaterul este concav, luînd simetricele lui c și d față de diagonala interioară se obține un patrulater convex de arie $S' > S$. Se pot considera din această cauză numai patrulatere convexe. Patrulaterul este împărțit de diagonală în două triunghiuri. Aria primului nu depășește jumătate din produsul a două dintre laturile sale, fie acesta $\frac{ab}{2}$. Aria celuiilalt nu depășește $\frac{cd}{2}$. Adunînd inegalitățile respective, se găsește $2S \leq ab + cd$. În mod analog $2S \leq bc + ad$. Adunînd aceste două inegalități obținute, se constată că

$$4S \leq (a + c)(b + d), \text{ adică } S \leq \frac{a + c}{2} \cdot \frac{b + d}{2}.$$

162. 1. Fie $n = 2k + 1$. La prima comandă elevul avînd numărul $k + 1$ rămîne pe loc, iar ceilalți se schimbă între ei doi cîte doi astfel:

$$1 \rightleftharpoons 2k + 1, 2 \rightleftharpoons 2k, 3 \rightleftharpoons 2k - 1, \dots, k \rightleftharpoons k + 2,$$

obținîndu-se succesiunea $2k + 1, 2k, 2k - 1, 2k - 2, \dots, 1$ (simbolul $a \rightleftharpoons b$ înseamnă că elevii purtînd numerele respective și-au schimbat locurile). La a doua comandă rămîne pe loc elevul avînd numărul $2k + 1$, iar

$$2k \rightleftharpoons 1, 2k - 1 \rightleftharpoons 2, 2k - 2 \rightleftharpoons 3, \dots, k + 1 \rightleftharpoons k$$

obținîndu-se succesiunea cerută $2k + 1, 1, 2, 3, \dots, 2k$.

2. Fie $n = 2k$. La prima comandă elevii avînd numerele 1 și $k + 1$ rămîn pe loc, iar $2 \rightleftharpoons 2k, 3 \rightleftharpoons 2k - 1, 4 \rightleftharpoons 2k - 2, \dots, k \rightleftharpoons k + 2$, găsindu-se succesiunea $1, 2k, 2k - 1, \dots, 2$.

La a doua comandă

$$1 \rightleftharpoons 2k, 2k - 1 \rightleftharpoons 2, 2k - 2 \rightleftharpoons 3, \dots, k + 1 \rightleftharpoons k$$

și se obține succesiunea cerută $2k, 1, 2, 3, \dots, 2k - 1$.

163. Dacă se taie figura după liniile care mărginesc zonele atît pe o parte cît și pe cealaltă, se obțin cel mult 100 de porțiuni care vor fi notate A_{ij} , considerînd că A_{ij} este intersecția dintre porțiunea A_i la prima împărțire în zone și porțiunea B_j la a doua împărțire ($i, j = 1, 2, \dots, 10$). Se consideră că porțiunea A_i este colorată cu cea de-a i -a culoare. Numărul de moduri în care poate fi colorată porțiunea B_j este $10!$. Se vor numerota acestea într-o ordine oarecare cu numerele $k = 1, 2, \dots, 10!$ și pentru fiecare mod S_k va fi suma ariilor porțiunilor A_{ij} colorate la fel pe ambele părți [dacă pentru perechea de indici (j, i) nu există A_{ij} , o vom considera pe aceasta de arie nulă].

$$\text{L e m ă. } \sum_{k=1}^{10!} S_k = 9!. \quad (*)$$

Rezolvarea problemei se reduce la demonstrarea acestei leme. Dacă $10!$ termeni nenegativi au suma $9!$, există printre aceștia unul care nu este mai mic decît $\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$, deoarece în caz contrar suma ar fi mai mică decît $10! \cdot \frac{1}{10} = 9!$.

Pentru demonstrarea lemei se găsește de câte ori aria S_{ij} a porțiunii A_{ij} se cuprinde în membrul întâi al egalității (*), ceea ce revine a afla pentru câte numere k suma S_k îl conține ca termen pe S_{ij} .

Pentru ca S_{ij} să fie termen al lui S_k este necesar și suficient ca în cel de al k -lea mod de colorare porțiunea B_j să aibă aceeași culoare ca și A_i . Restul de nouă culori se pot atribui celorlalte porțiuni în $9!$ moduri. Astfel, suma $\sum_k S_k$ conține fiecare termen S_{ij} de $9!$ ori, adică $\sum_k S_k = 9! \sum S_{ij} = 9!$. Lema este demonstrată.

164. Fie $ABCDEF$ hexagonul dat, iar P , Q și R punctele de intersecție ale diagonalelor sale AD , BE și CF (fig. 79). Astfel hexagonul se descompune în $\triangle PQR$ și trei patrulatere formate fiecare din două laturi consecutive ale hexagonului și două segmente de diagonală. Dacă diagonalele considerate sînt concurente, atunci patrulaterul se descompune numai în cele trei patrulatere. Cel puțin aria unuia dintre aceste patrulatere nu depășește $\frac{1}{3} S$, fie

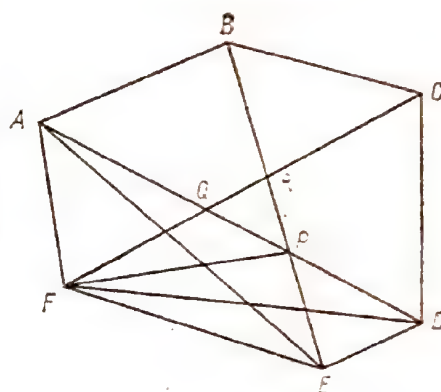


Fig. 79

acesta $APEF$. Se duce diagonala sa FP care îl împarte în două triunghiuri între care unul a cărui arie nu depășește $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} S$, fie această arie $S_{\triangle FPE}$. În acest caz aria unuia din triunghiurile EFA și FED nu depășește aria $S_{\triangle FPE}$. Într-adevăr, acestea au înălțimea FE comună, iar vîrfurile sînt situate pe aceeași dreaptă, P fiind situat între A și D , de aceea înălțimea din P a triunghiului FPE nu este mai mică decît înălțimea unuia din triunghiuri.

165. Fie $k = 100a + 10b + c$, a fiind un număr întreg nenegativ, $0 \leq b \leq 9$, iar $0 \leq c \leq 9$. Se observă ușor că ultimele două cifre ale acestuia nu depind de a . Oricare 100 de numere naturale consecutive s-ar lua, ultimele două cifre iau toate valorile între 00 și 99, inclusiv acestea. De aceea se alege numerele consecutive de la 00 la 99. Se calculează ultimele două cifre ale sumei de puteri a opta :

$$\sum_{k=0}^{99} k^8 = \sum_{x=0}^9 \sum_{y=0}^9 (10x + y)^8 = \sum_{x=0}^9 \sum_{y=0}^9 [(10x)^8 + 8(10x)^7 + \dots + 8 \cdot 10xy^7 + y^8].$$

Se observă că ultimele două cifre sînt influențate numai de ultimii doi termeni :

$$\sum_{x=0}^9 \sum_{y=0}^9 (80xy^7 + y^8) = \sum_{y=0}^9 (80 \cdot 45y^7 + 10y^8).$$

Primul termen are ultimele două cifre zerouri, de aceea penultima cifră este dată de $\sum_{y=0}^9 y^8$. Avînd în vedere cifra terminală a puterilor :

întîi 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

a doua 0 1 4 9 6 5 6 9 4 1

a patra 0 1 6 1 6 5 6 1 6 1

a opta 0 1 6 1 6 5 6 1 6 1

rezultă că $2(1 + 6 + 1 + 6) + 5 = 33$, deci suma se termină în 30.

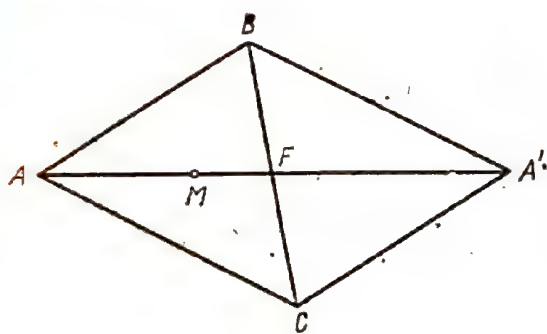


Fig. 80

166. Se completează $\triangle ABC$ formînd paralelogramul $ABA'C$ (fig. 80). Segmentul AM este o treime din AA' , $\angle ABA' = \hat{B} + \hat{C}$, dar conform enunțului $40^\circ \leq \hat{A} \leq 70^\circ$, de aceea $110^\circ \leq \hat{B} + \hat{C} \leq 140^\circ$ (*). În acest mod, vîrfurile B sînt supuse condiției (*), adică se află în afara segmentului de cerc capabil de 140° și în interiorul segmentului de cerc capabil de

110° , construite pe segmentul AA' . Pe de altă parte, punctul B se află situat în afara segmentului de cerc capabil de 70° și în interiorul segmentului de cerc capabil de 40° , construite pe segmentul AF .

În acest caz $\hat{C} = \angle FBA'$, adică punctul B trebuie să se afle de asemenea și în interiorul segmentului de cerc capabil de 40° și în afara segmentului de cerc capabil de 70° , construite pe FA' . Se consideră intersecția acestor trei lunule.

Discuție. Prin punctul P de intersecție al segmentelor de cerc capabile de 70° și construite pe AF și FA' trece segmentul de cerc construit pe AA' și capabil de 140° , iar prin punctele Q și R

trece segmentul de cerc capabil de 110° și care se sprijină pe AA' . Locul geometric căutat este, prin urmare, triunghiul curbiliniu PQR (fig. 81).

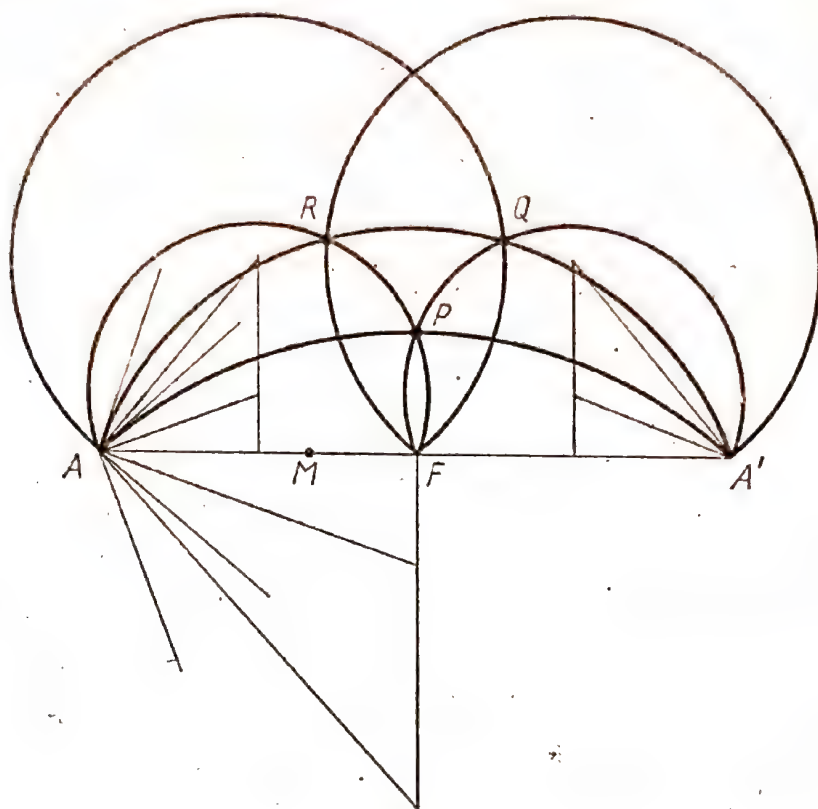


Fig. 81

167. Fie $AB \perp CD$, $DB \perp AC$, $CB \perp AD$ (fig. 82). Patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi, deoarece $EH \parallel AB$ și $EH = \frac{1}{2} AB$, $FG \parallel AB$ și $FG = \frac{1}{2} AB$, adică $FG \parallel EH$ și $FG = EH$. Fiindcă $FE \parallel CD$ și

$EH \parallel AB$, unghiul format de FE cu EH este egal cu unghiul format de CD cu AB , adică este unghi drept. Într-un dreptunghi diagonalele sînt egale, adică $FH = EG$. Se notează cu O mijlocul segmentului FH . Patrulaterul $KFLH$ este dreptunghi, iar diagonalele acestuia se intersectează tot în O . Se deduce astfel că $FO = OH = OK = OL = OE = OG$, adică punctele F, G, H, E, K, L se află pe o sferă cu centrul în punctul O .

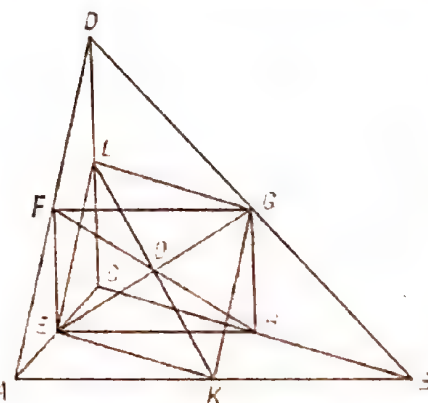


Fig. 82

168. Oricare față a cubului se poate transforma printr-o rotație în oricare altă față. Fie punctul M situat pe o față a cubului, însă nu pe una din muchii și nici într-un vîrf. Dacă numărul de transformate prin rotație ale punctului M care se găsesc pe aceeași față este k , numărul total de transformate ale lui M va fi $6k$. În mod analog, dacă punctul H este situat pe o muchie și prin rotație numărul transformatelor sale care se află pe aceeași muchie este l , numărul total de transformate ale lui H va fi $12l$. Din această cauză, numărul total de puncte care se găsesc pe fețele și muchiile cubului este divizibil cu 6. Un punct situat într-unul din vîrfuri are 8 transformate. Din aceasta înseamnă că sau 100, sau $100 - 8$ sînt multipli de 6, ceea ce nu este adevărat.

169. Se observă că dacă x verifică inecuația, oricare ar fi n , aceasta este satisfăcută și de $x + 2k\pi$.

Dacă $n = 1$, rezultă $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, adică $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ și $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$. Mulțimea soluțiilor care verifică toate inegalitățile va fi deci inclusă în mulțimea soluțiilor pentru acest caz particular.

Fie x_0 astfel ca $0 < x_0 < \frac{\pi}{3}$. Dacă se ia $k = \left\lceil \frac{\pi}{3x_0} \right\rceil + 1$, rezultă

$$\frac{2\pi}{3} > kx_0 > \frac{\pi}{3} \text{ și se obține}$$

$$\sin x_0 + \sin 2x_0 + \dots + \sin kx_0 > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

deoarece toți termenii sînt pozitivi, iar $\sin kx_0 > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Valorile $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ nu verifică deci inecuațiile.

Faptul că toți $x \in \left[\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right]$ sînt soluții ale inecuației se verifică astfel. Este evident că $x = 2k\pi$ este soluție. Se calculează suma din membrul întii al ecuației înmulțind-o și împărțind-o cu $2 \sin \frac{x}{2}$, $x \neq 2\pi$. Deoarece

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin k\pi = \cos \left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

rezultă

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{1}{2} x - \cos \frac{3}{2} x + \right. \\ &+ \cos \frac{3}{2} x - \cos \frac{5}{2} x + \dots + \cos \frac{2n-1}{2} x - \cos \frac{2n+1}{2} x \left. \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]. \end{aligned}$$

Dacă se notează $\frac{x}{2} = z$, rămîne să se verifice că orice $z \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi \right)$ satisface sistemul de inecuații:

$$\frac{\cos z - \cos(2n+1)z}{2 \sin z} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Este însă adevărată relația

$$\frac{\cos z - \cos(2n+1)z}{2 \sin z} \leq \frac{\cos z + 1}{2 \sin z}.$$

Deoarece $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$ sînt soluții ale inecuației $\frac{\cos z + 1}{2 \sin z} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, vor fi soluții și ale inecuației de mai sus.

$$\text{Răspuns: } x \in \left[\frac{2}{3} \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \right].$$

170. Un grup de traducători în care fiecare limbă este știută de a și numai de a persoane se va numi grup de volum a . Se demonstrează prin inducție completă că un grup de volum $2n$ conține o parte de volum $2k$ ($k \leq n$), ceea ce, în particular, demonstrează afirmația din enunțul problemei.

Pentru $k = 0$ și $k = n$ afirmația este evidentă. Este deci suficient să se considere $k < n$, $n > 1$. Fie p numărul traducătorilor care știu limbile J și M (categoria A), q numărul celor care știu lim-

bile M și P (categoria B) și r numărul celor care știu limbile J și P (categoria C). Este evident că aceștia sînt diferiți. Dacă $p > 0$, $q > 0$ și $r > 0$, separînd din fiecare categorie A , B , C , cîte un traducător, cei care rămîn formează un grup de volum $2(n-1)$ și folosind ipoteza de la inducție se poate găsi o parte de volum $2k$.

Dacă $p = q = r = 0$, atunci traducătorii sînt fie poligloți (în număr de l) știind toate trei limbi, fie sînt specialiști într-o singură limbă, pentru fiecare dintre cele trei limbi găsindu-se același număr de astfel de traducători, în total aceștia fiind $2n - l$. Specialiștii într-o singură limbă pot fi grupați cîte trei într-un colectiv poliglot. Dintre cei $2n$ poligloți și poligloți colectivi se pot separa totdeauna $2k$ în condițiile cerute.

Se consideră, în continuare, că $p \leq q \leq r$. Dacă $p = q = 0$, iar $r > 0$, după îndepărtarea tuturor poligloților și a numărului maxim de poligloți colectivi dintre specialiștii într-o singură limbă, rămîn r traducători de categoria C . Întrucît numărul traducătorilor care vorbesc cîte o singură limbă este același, există cel puțin încă r specialiști numai în limba M . Se mai formează r perechi poliglote din traducătorii de categoria C și cei care știu numai limba M . Cei care rămîn trebuie să fie specialiști într-o singură limbă, și cum pentru fiecare dintre limbi numărul lor este același, ei pot fi grupați în colective poliglote. Se poate deci alege și în acest caz din traducătorii poligloți, perechile poliglote și colectivele poliglote, o parte de volum cerut. Dacă $p = 0$, $q > 0$, $r > 0$, după îndepărtarea poligloților și a numărului maxim de colective poliglote de specialiști într-o singură limbă, printre traducătorii bilingvi se vor găsi $q + r$ care știu limba P , q traducători de limbă M și r traducători de limbă J . Înseamnă în acest caz că se pot găsi cel puțin q specialiști numai în limba J și r specialiști numai în limba M . Dacă dintre aceștia se separă un specialist numai în limba J , unul numai în limba M , unul de categorie B și unul de categorie C , restul vor forma un grup de volum de $2(n-1)$ în care se poate găsi partea cerută, conform ipotezei de la inducție.

171. Fie $l_1(z) = \frac{1}{A} l(z) = z - \gamma$, $\gamma = -\frac{B}{A}$, $Q_2 = z \cdot \gamma$. Dacă

se notează $M_1 = \max_{-1 \leq x \leq 1} |l(x)|$, atunci $M_1 = \frac{1}{|A|} M$ și este suficient să se arate că $|l_1(z)| \leq M_1 \rho$. În continuare $|l_1(x)| = |x - \gamma|$, adică tocmai lungimea segmentului XQ_2 , iar dacă x se află pe segmentul $[-1, 1]$, conform unei proprietăți cunoscute a triunghiului $Q_1Q_2Q_3$, segmentul Q_2X este mai mic decît cel puțin una dintre laturile Q_2Q_1

și Q_2Q_3 . De aceea $M_1 = \max(Q_2Q_1, Q_2Q_3)$. Se găsește apoi că $|l_1(z)| = |z - \gamma| = PQ_2$. În acest fel s-a ajuns la următoarea problemă de geometrie. În patrulaterul $PQ_1Q_2Q_3$ lungimea diagonalei Q_1Q_3 este 2. Trebuie să se demonstreze că lungimea diagonalei PQ_2 satisface inegalitatea $PQ_2 \leq (PQ_1 + PQ_3) \max(Q_2Q_1, Q_2Q_3)$. Se observă imediat că $M_1 = \max(Q_1Q_2, Q_2Q_3) \geq 1$, deoarece în caz contrar $Q_1Q_2 + Q_2Q_3 < 2 = Q_1Q_3$, ceea ce este imposibil. Considerind triunghiurile Q_1Q_2P și Q_3Q_2P , se obține

$$Q_1Q_2 + Q_1P \geq Q_2P \text{ și } Q_3Q_2 + Q_3P \geq Q_2P,$$

deci

$$\frac{Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3P + PQ_1}{2} \geq Q_2P.$$

Se examinează cazurile:

1) $Q_3P + PQ_1 \geq Q_1Q_2 + Q_2Q_3$. În acest caz $Q_3P + PQ_1 \geq Q_2P$, iar conform celor de mai sus $M_1 \geq 1$, rezultând

$$(Q_3P + PQ_1)M_1 \geq Q_2P.$$

2) $Q_3P + PQ_1 \leq Q_1Q_2 + Q_2Q_3$. Se îndeplinește astfel inegalitatea $Q_2P \leq 2\max(Q_1Q_2, Q_2Q_3) = 2M_1$ și deoarece din ΔQ_1PQ_3 se găsește că $Q_3P + PQ_1 \geq Q_1Q_3 = 2$, înseamnă că $Q_2P \leq 2M_1 \leq (Q_3P + PQ_1)M_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

172. Dacă se pun în evidență punctele A_1, A_2, \dots, A_6 , $6 < 2\pi$, $2\pi - 6 = \alpha_1 < 1$, punctul A_7 aflându-se deci pe arcul A_0A_1 și împărțindu-l în fragmentele $A_0A_7 = 1 - \alpha_1$ și $A_7A_1 = \alpha_1$. Arcele sînt astfel de trei feluri: de lungime α_1 , de lungime $1 - \alpha_1$ și de lungime 1. Se consideră cazul general, cînd numărul punctelor $N \geq 7$. Fie A_s și A_t cele mai apropiate puncte de A_0 situate în stînga, respectiv în dreapta sa.

L e m ă. Egalitatea $M = 2\pi Q$, unde M și Q sînt numere întregi, implică $M = Q = 0$.

Adevărul lemei rezultă din iraționalitatea lui π , $\pi \neq \frac{M}{2Q}$ pentru orice valori întregi ale lui M și Q .

Astfel $s = 2\pi\sigma - \varphi$, $t = 2\pi\tau + \psi$, și deoarece $s + t = 2\pi(\sigma + \tau) + (\psi - \varphi)$, conform lemei, $\psi - \varphi \neq 0$.

Se va demonstra prin inducție completă asupra lui N că arcele pot avea numai trei lungimi: φ , ψ și eventual $\varphi + \psi$. Aceasta este adevărat pentru $N = 7$ și se presupune că este adevărat și pentru punctele A_0, A_1, \dots, A_N . Se aleg, ca mai sus, punctele A_s și A_t . Fie punctul A_{N+1} situat pe arcul $A_q A_r$ ($q \neq 0, r \neq 0$). Evident că lungimea arcului $A_q A_{N+1}$ este egală cu cea a arcului $A_0 A_{N+1-q}$, fiindcă este determinată numai de diferența indicilor, iar $A_0 A_{N+1-q} \geq A_0 A_t$ din modul în care a fost ales A_t . (Se observă că $N - 1 - q \leq N$.) Reciproc, $A_0 A_t = A_{N+1-t} A_{N+1} \geq A_q A_{N+1}$. Rezultă că $\psi = A_0 A_t = A_q A_{N+1}$ și $q = N + 1 - t$. Analog, $A_{N+1} A_r = A_s A_0$, $r = N + 1 - s$, așa că dacă un singur arc de lungime $\psi + \varphi$ se descompune în două arce de lungime ψ și φ , numărul lungimilor pe care le pot avea arcele nu se schimbă. În continuare se consideră cazul cînd $q = 0$ sau $r = 0$ ($q = r = 0$ numai dacă $N = 1$). Numai unul din arcele $A_{N+1} A_r$ (dacă $q = 0$) sau $A_q A_{N+1}$ (dacă $r = 0$) sînt egale respectiv cu φ sau ψ . Se presupune că primul dintre arcele de mai sus are lungimea ψ . Se va arăta că punctele A_0, A_1, \dots, A_N împart întregul cerc numai în arce de lungime φ și ψ , toate arcele de lungime $\varphi + \psi$ fiind deja descompuse. Prin reducere la absurd, se admite că ar exista un astfel de arc $A_m A_n$. Ar rezulta $(n - 2\pi\nu) - (m - 2\pi\mu) = (t - 2\pi\tau) - (s - 2\pi\sigma) = \varphi + \psi$, deci $(n - m) - (t - s) = 2\pi[(\mu - \nu) - (\chi - \rho)]$ și $m - n = t - s$. Dacă $m \geq s$, punctul A_{m-s} trebuie să se afle pe arcul $A_m A_n$ deoarece pe arcul $A_s A_t$ se află punctul A_0 . Rămîne cazul $m < s$, în care pe arcul $A_s A_t$ se găsește punctul A_{N+1} și deci punctul $A_{N+1-s+m}$ se află pe arcul $A_m A_n$, ceea ce încheie demonstrația afirmației de mai sus. Adăugînd un al $N + 1$ lea punct se obțin din nou trei lungimi ale arcelor: φ , ψ și $\psi - \varphi$. Trebuie să se determine însă la care din aceste două tipuri aparține $N = 1000$. Fie numărul N de al doilea tip, adică astfel ca punctele A_0, A_1, \dots, A_N împart cercul în arce care au numai două lungimi. Primul N care este de acest tip va fi 6.

Dacă punctele A_0, A_1, \dots, A_N împart cercul în N arce de lungime ψ și G arce de lungime φ ($\psi > \varphi$), punctele următoare $A_{N+1}, A_{N+2}, \dots, A_{N+F}$ vor împărți arcele de lungime ψ , în arce de lungime φ și $\chi = \psi - \varphi$, ceea ce va duce la o descompunere în $G + F$ arce de lungime φ și F arce de lungime χ . Se deduce ușor prin inducție că dacă pentru fiecare N_k de al doilea tip numerele G_k și F_k vor fi pare, și toate care urmează vor fi pare. În cazul $N = 6$ cercul este împărțit în 6 arce de lungime 1 și un arc de lungime $\alpha_1 = 2\pi - 6 = 0,28318\dots$. Următorii N de al doilea tip vor fi $N_2 = 12$ cînd se găsesc 6 arce de lungime $1 - \alpha_1$ și 7 arce de lungime α_1 , apoi $N_3 = 18$, cînd se găsesc 6 arce de lungime $1 - 2\alpha_1 = 0,574\dots$ și 13 arce de lungime α_1 . În acest caz cel mai mare va fi segmentul

din dreapta. Însă $1 - 3\alpha_1 = 0,15 \dots$ și în continuare cel mai mare va fi segmentul de cerc din stînga. Cînd $N_4 = 24$ se găsesc 6 arce de lungime $1 - 3\alpha_1$ și 20 arce de lungime α_1 , adică G_4 și F_4 sînt pare, deci vor fi pare și următoarele G_k și F_k .

Punctele date $A_0, A_1, \dots, A_{1000}$ descompun cercul în 1001 arce care, conform demonstrației date, vor avea trei feluri de lungimi.

173. Se demonstrează mai întîi necesitatea condițiilor (B). Dacă $f = g = 0$, condiția (A) este satisfăcută pentru orice triplet (a, b, c) de numere reale. Dacă $f \neq 0$ și $g = 0$, condiția (A) poate fi îndeplinită numai dacă $a \geq 0$. Dacă $f = 0$ și $g \neq 0$, (A) este adevărată numai dacă $c \geq 0$. Fie în continuare $f \neq 0$ și $g = \lambda f$, λ fiind un număr real arbitrar. Se găsește

$$af^2 + bfg + cg^2 = (a + b\lambda + c\lambda^2)f^2.$$

Polinomul de gradul al doilea în λ care se găsește în paranteză va fi nenegativ pentru orice valoare reală a lui λ , numai dacă nu are două rădăcini reale distincte, adică dacă $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, ceea ce echivalează cu cea de-a treia condiție (B).

Suficiența condiției (B) poate fi demonstrată astfel: dacă $fg \geq 0$,

$$af^2 + bfg + cg^2 \equiv (\sqrt{af} - \sqrt{cg})^2 + (2\sqrt{ac} + b)fg \geq 0,$$

iar dacă $fg < 0$,

$$af^2 + bfg + cg^2 \equiv (\sqrt{af} + \sqrt{cg})^2 - (2\sqrt{ac} - b)fg \geq 0$$

pe baza condiției $4ac \geq b^2$.

174. Se alege unitatea de lungime astfel ca $AB = AC = 1$ și deci $BA' = CA' = \sin 10^\circ$, A' fiind mijlocul bazei BC (fig. 83).

În triunghiul isoscel ACD , evident,

$$CD = \frac{1}{2\cos 20^\circ}.$$

Se fac notațiile $\angle EDC = x$ și $\angle CED = y$. Pe baza teoremei tangentelor se obține din $\triangle DCE$ că

$$\frac{\frac{1}{2\cos 20^\circ} + 2\sin 10^\circ}{\frac{1}{2\cos 20^\circ} - 2\sin 10^\circ} = \frac{\operatorname{tg} \frac{y+x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{y-x}{2}}.$$

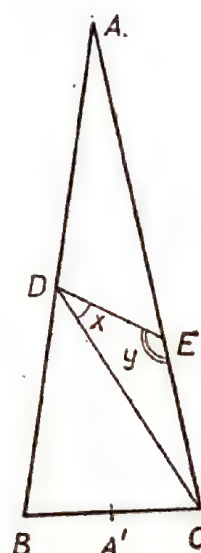


Fig. 83

Deoarece $y + x = 160^\circ$, ecuația precedentă ia forma

$$\frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg}(80^\circ - x)} = \frac{1 + 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}{1 - 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}.$$

Membrul întâi al acestei egalități devine succesiv

$$\frac{\operatorname{tg} 80^\circ}{\operatorname{tg}(80^\circ - x)} = \frac{\operatorname{ctg} 10^\circ}{\operatorname{ctg}(x + 10^\circ)} = \frac{\operatorname{tg}(x + 10^\circ)}{\operatorname{tg} 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} \operatorname{tg}(x + 10^\circ),$$

iar membrul drept al aceleiași egalități

$$\frac{1 + 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ}{1 - 4\sin 10^\circ \cos 20^\circ} = \frac{1 + 2(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ)}{1 - 2(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ)} = \frac{1 - \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}.$$

$$\text{Astfel, } \frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} \operatorname{tg}(x + 10^\circ) = \frac{1 - \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}, \text{ adică } \operatorname{tg}(x + 10^\circ) = \frac{1 - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}.$$

Calculul membrului drept al ultimei relații arată că

$$\frac{1 - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1 - \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sqrt{(1 - \cos 80^\circ)^2}}{\sqrt{1 - \cos^2 80^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 80^\circ}{1 + \cos 80^\circ}} = \operatorname{tg} 40^\circ.$$

Deoarece $0 < x < 180^\circ$, mărimea unghiului căutat este 30° .

175. 1) Dacă $m = 0$, inegalitatea dată este evidentă.

2) Dacă $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m &\geq 2 \sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m} = \\ &= 2 \sqrt{\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^m} \geq 2\sqrt{4^m} = 2^{m+1}. \end{aligned}$$

3) Dacă $m = -n$, $n > 0$,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m &= \left(\frac{b}{a+b}\right)^n + \left(\frac{a}{a+b}\right)^n = \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\left(\frac{2b}{a+b}\right)^n + \left(\frac{2a}{a+b}\right)^n \right] = \frac{1}{2^n} \left[\left(1 + \frac{b-a}{a+b}\right)^n + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n \right] \geq \frac{1}{2^n} \cdot 2 = 2^{-n+1} = 2^{m+1}, \end{aligned}$$

fiindcă

$$\left(1 + \frac{b-a}{a+b}\right)^n + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n \geq 2,$$

relație care se poate demonstra fie prin inducție, fie aplicând formula binomului lui Newton.

176. Demonstrația se face prin inducție față de k .

Propoziția este evidentă pentru $k = 0$. Se presupune că ea este adevărată pentru $k = n$, rezultând că dacă polinomul $P(x) = a_0x^{n+1} + a_1x^n + \dots + a_{n+1}$ este divizibil cu m , la fel va fi și polinomul $P(x+1) - P(x) = (n+1)a_0x^n + \dots$ al cărui grad este n . Astfel, conform ipotezei făcute, $n!(n+1)a_0$ se divide la m . Reciproc, în cazul când $k!a_0$ este multiplu de m , polinomul $P(x) = a_0x(x+1)\dots(x+k-1)$ care se divide totdeauna la $k!a_0$ se va divide și la m .

177. Se poate considera că $x \leq y \leq z$ și se va căuta să se construiască un astfel de triunghi. Este clar că punctul C poate fi luat arbitrar la distanța z de punctul O . Punctul A trebuie să se afle astfel pe cercul S_1 de rază x și centrul O . Considerînd, în continuare, că triunghiul este parcurs în sensul A, B, C opus sensului acelor de ceasornic, punctul B se va afla pe cercul S_2 obținut prin rotația cercului S_1 cu 60° în jurul punctului C în sens opus celui al acelor de ceasornic. Fiindcă $OB = y$, construcția este imposibilă, dacă S_2 nu conține puncte situate la distanța y de punctul O .

Este evident, în continuare, că $OO' = z$ așa că pentru existența triunghiului este necesar ca $z - x \leq y \leq z + x$ sau $z \leq x + y$ și $y \leq z + x$ (pe baza faptului că $x \leq y$ rezultă însă $x \leq y + z$).

Reciproc, dacă $z \leq x + y$ și $y \leq z + x$ (și de asemenea $x \leq y + z$), vor exista un punct sau chiar două puncte pe S_2 (fig. 84), la distanța y de punctul O , și alegînd oricare dintre ele drept punct B , se obține punctul A prin rotirea lui CB cu 60° în sensul acelor de ceasornic.

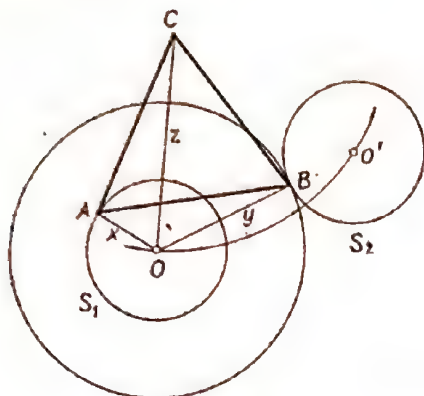


Fig. 84

178. Întrucît $\sqrt{2}$ este număr irațional, numărul $\{10^n \sqrt{2}\}$ va fi de asemenea irațional pentru orice n natural. Zecimalele de orice ordin ale unui număr irațional sînt unic determinate. Fie d_n cea de a n -a zecimală din dezvoltarea lui $\sqrt{2}$ și în consecință $\{10^n \sqrt{2}\} = 0, d_{n+1} d_{n+2} \dots$

Se presupune că $\{10^p \sqrt{2}\} = \{10^q \sqrt{2}\}$ ($p \neq q$). Pe baza unicității zecimalelor de orice ordin ale unui număr irațional, egalitatea este satisfăcută dacă și numai dacă

$$d_{n+p} = d_{n+q} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Rezultă că dezvoltarea zecimală a lui $\sqrt{2}$ este periodică cu perioada $|p - q|$, ceea ce contrazice iraționalitatea lui $\sqrt{2}$.

179. Direcțiile fixe date se iau ca axe de coordonate, iar ora 9,00 se ia ca moment de referință, unitatea de timp considerîndu-se de 5 minute. La momentul t vapoarele au coordonatele $(x - v_1 t, 0)$ și respectiv $(0, y - v_2 t)$, prin v_1 și v_2 fiind notate vitezele celor două vapoare.

Pătratul distanței dintre cele două vapoare la momentul t este

$$S^2 = (x - v_1 t)^2 + (y - v_2 t)^2 - 2(x - v_1 t)(y - v_2 t) \cos \alpha,$$

adică $S^2 = a + 2bt + ct^2$ este dat de un trinom de gradul al doilea în variabila t . Din condițiile problemei se obține sistemul

$$\begin{cases} a = 400, \\ a + 14b + 49c = 225, \\ a + 22b + 121c = 169, \end{cases}$$

ceea ce conduce la valorile $a = 400$, $b = -16$, $c = 1$ și deci

$$S^2 = t^2 - 32t + 400 = (t - 16)^2 + 144.$$

Cea mai mică valoare a acestui trinom este $S_0^2 = 144$ dacă $t = 16$. În consecință, la ora 10 și 20 minute distanța între vapoare va fi minimă și egală cu 12 mile.

180. Fie $n + 1, n + 2, \dots, n + p - 1$ numerele întregi succesive care satisfac condiția din enunț. Aplicând formula sumei termenilor unei progresii aritmetice, se găsește

$$S^{(1)} = \frac{(2n + p)(p - 1)}{2}. \quad (1)$$

Se calculează suma pătratelor acestor numere :

$$S^{(2)} = \sum_{k=1}^{p-1} (n + k)^2 = (p - 1)n^2 + 2n \sum_{k=1}^{p-1} k + \sum_{k=1}^{p-1} k^2$$

și prin folosirea formulei care dă suma primelor k pătrate din șirul numerelor naturale se găsește

$$S^{(2)} = \frac{p - 1}{6} (6n^2 + 6np + 2p^2 - p). \quad (2)$$

Raportul relațiilor (1) și (2) va fi

$$\frac{S^{(2)}}{S^{(1)}} = \frac{6n^2 + 6np + 2p^2 - p}{3(2n + p)} = n + \frac{p}{2} + \frac{(p - 2)p}{6(2n + p)}. \quad (3)$$

Pentru ca raportul să fie exprimat de un număr întreg, este necesar și suficient ca

$$\frac{(p - 2)p}{6(2n + p)} = \frac{2m + 1}{2}. \quad (4)$$

Rezultă astfel că $p^2 - 2p = 12mn + 6mp + 6n + 3p$, adică

$$p(p - 5) = 6(2mn + mp + n). \quad (5)$$

Fiindcă membrul al doilea al egalității (5) este un număr întreg, iar p este un număr prim, $p - 5$ este divizibil la 6, adică $p - 5 = 6l$ sau

$$p = 6l + 5. \quad (6)$$

Se arată că pentru orice număr prim p se poate determina un număr natural n astfel ca numerele $n + 1, \dots$, să fie cele căutate. Prin înlocuirea relației (6) în relația (4) se obține

$$\frac{(6l + 3)(6l + 5)}{6(2n + 6l + 5)} = \frac{2m + 1}{2} \text{ sau } \frac{(2l + 1)(6l + 5)}{2(2n + 6l + 5)} = \frac{2m + 1}{2}.$$

Se observă deci că, luând pe m , de exemplu, egal cu zero, n există și este egal cu $n = l(6l + 5)$.

181. Fie n puncte din spațiu care satisfac condiția din enunț. Oricare din unghiurile avînd vîrfurile în aceste puncte va fi sau mai mare decît 120° sau mai mic decît 60° .

În prealabil se va demonstra lema care urmează.

L e m ă. Există numai două puncte printre cele date, astfel ca distanța între acestea este maximă, iar fiecare din unghiurile cu vîrfurile în cele două puncte este mai mic decît 60° .

Fie punctele B și C între care distanța este maximă. Atunci pentru orice punct A , diferite de B și C , $\angle BAC > 120^\circ$, deoarece va fi unghiul cel mai mare în $\triangle BAC$. Pe de altă parte, pentru orice puncte A_i, A_j (fig. 85), $\angle A_i A_j C < 60^\circ$ și $\angle A_i A_j B < 60^\circ$. Orice unghi plan al unui unghi triedru este mai mic decît suma celorlalte două unghiuri plane. În consecință,

$$\angle A_i B A_j < \angle A_i B C + \angle A_j B C < 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

adică $\angle A_i B A_j < 120^\circ$, și deci $\angle A_i B A_j < 60^\circ$.

Afirmația din enunț va fi demonstrată prin inducție completă și anume se va arăta că dacă B și C sînt punctele cele mai îndepărtate unul față de celălalt dintre cele n puncte date, se poate face o numerotare a tuturor punctelor astfel ca $\angle A_i A_j A_k > 120^\circ$ pentru toți indicii $1 < i < j < k \leq n$, iar $A_1 \equiv B$, $A_n \equiv C$.

Propoziția este adevărată pentru $n = 3$. Se presupune că propoziția este adevărată pentru m puncte și se va arăta că este adevărată și pentru $m + 1$ puncte. Se alege dintre cele $m + 1$ puncte două care sînt cele mai îndepărtate unul față de celălalt, fie acestea B și C . Punctul O se notează A_{m+1} și nu va fi luat pentru moment în considerare. Punctul celălalt extrem, B , se află printre cele care au rămas. Toate unghiurile cu vîrfurile în B sînt mai mici decît 60° . Conform presupunerii făcute la inducție acestea se pot numera astfel ca $A_1 \equiv B$ și $\angle A_i A_j A_k > 120^\circ$ pentru toți indicii $1 \leq i < j < k \leq m$. Se arată, în continuare, că $\angle A_i A_j A_{m+1} > 120^\circ$ pentru

toți indicii $1 \leq i < j \leq m$. Afirmația este adevărată pentru $i = 1$, fiindcă punctele A_1 și A_{m+1} sînt cele mai îndepărtate.

Fie $1 < i < j \leq m$. În acest caz $\angle A_i A_j A_{m+1} > 120^\circ$ deoarece în triunghiul $A_i A_j A_{m+1}$ unghiul din vîrf A_{m+1} este mai mic decît 60° .

Unghiul $A_j A_i A_{m+1}$ (fig. 86) este de asemenea mai mic decît 60° , deoarece dacă acest unghi ar fi mai mare decît 120° , ținînd seama că $\angle A_i A_j A_{m+1} > 120^\circ$ (deoarece punctele A_1 și A_{m+1} sînt cele mai îndepărtate unul de celălalt) s-ar deduce conform ipotezei de la inducție că fiecare din unghiurile plane ale unghiului triedru cu vîrf în A_i ar fi mai mare decît 120° , ceea ce nu este posibil. Propoziția este astfel complet demonstrată.

182. Fie punctul arbitrar P_j . Deoarece cinci segmente de dreaptă au același punct inițial P_1 , cel puțin trei dintre acestea au aceeași culoare, pe exemplu $P_1 P_2, P_1 P_3, P_1 P_4$ au toate culoarea albă. Dacă cel puțin unul din segmentele $P_2 P_3, P_3 P_4, P_4 P_2$ este alb, de exemplu $P_2 P_3$, rezultă că $\triangle P_1 P_2 P_3$ este alb. Dacă toate aceste segmente sînt negre, și $\triangle P_2 P_3 P_4$ este negru.

183. Se demonstrează că nici un număr x de forma $x = 8n + 7$ nu poate fi scris sub forma $x = a^3 + b^3 + c^3$. Se vor examina diferitele parități ale numerelor a, b, c .

1) Dacă a, b, c sînt toate numere pare, x va fi de asemenea număr par.

2) Dacă unul din numerele a, b, c este par, iar celelalte două sînt numere impare, x va fi număr par.

3) Dacă două din numerele a, b, c sînt numere pare, iar al treilea număr este impar (de exemplu $a = 2j, b = 2k, c = 2l + 1$) se obține că $x = 4(j^2 + k^2 + l^2 + l) + 1$, ceea ce înseamnă că x are fie forma $x = 8n + 1$, fie forma $x = 8n + 5$.

4) Dacă a, b, c sînt toate numere impare, se găsește

$$\begin{aligned} x &= (2j + 1)^2 + (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = \\ &= 4j(j + 1) + 4k(k + 1) + 4l(l + 1) + 3 = 8n + 3. \end{aligned}$$

În acest fel au fost examinate toate cazurile posibile.

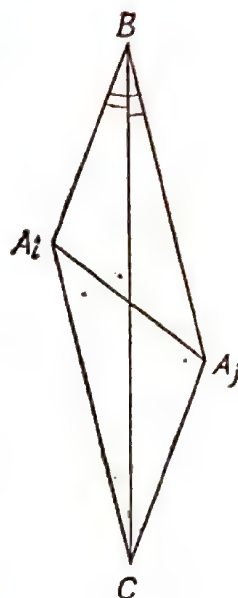


Fig. 85



Fig. 86

184. Numărul real x_0 ($0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$) este soluție a acestei ecuații numai dacă este soluție a uneia dintre următoarele trei ecuații:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x), \quad (1)$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}, \quad (2)$$

$$(\sin^4 x - \cos^4 x)[\sin^4 x \cos^4 x - \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x)] = 0. \quad (3)$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{4}$ este soluție a ecuației (1) indiferent de valoarea λ și că numărul $x_0 \neq \frac{\pi}{4}$ ($0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$) este soluție a ecuației (1) dacă și numai dacă este soluție a ecuațiilor:

$$\sin^4 x \cos^4 x = \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x); \quad (4)$$

$$\frac{1}{16} \sin^4 2x = \lambda[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x], \quad (5)$$

$$\frac{1}{16} \sin^4 2x = \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right), \quad (6)$$

$$\sin^4 2x + 8\lambda \sin^2 2x - 16\lambda = 0. \quad (7)$$

Numărul $x_0 \neq \frac{\pi}{4}$ ($0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$) este soluție a ecuației (7) în cazul când numărul $z_0 = \sin^2 2x_0$ este soluție a ecuației

$$z^2 + 8\lambda z - 16\lambda = 0, \quad (8)$$

cu condiția $0 < z_0 < 1$. Fiecărei astfel de soluții a ecuației (8) îi corespund două și numai două soluții ale ecuației (7) astfel ca $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_0 \neq \frac{\pi}{4}$.

Ecuația (8) admite soluții reale dacă și numai dacă discriminantul său $\Delta = 16\lambda^2 + 16\lambda = 16\lambda(\lambda + 1) \geq 0$, adică fie $\lambda \geq 0$, fie $\lambda \leq -1$.

Cele două soluții au în acest caz forma

$$z_1 = 4(\sqrt{\lambda(\lambda + 1)} - \lambda) \text{ și } z_2 = -4(\sqrt{\lambda(\lambda + 1)} + \lambda).$$

Pe intervalul $(-1, 0)$ ecuația (8) nu are soluții reale.

Dacă $\lambda \geq 0$, soluția z_2 a ecuației (8) este totdeauna negativă și din această cauză nu este soluție a ecuației (7). Soluția z_1 satisface inegalitățile $0 < z_1 < 1$ numai dacă $\sqrt{\lambda(\lambda+1)} < \frac{1}{4} + \lambda$, adică pentru $\lambda < \frac{1}{8}$. În acest caz ecuația (7) are două soluții, deci ecuația inițială (1) are trei soluții.

Dacă $\lambda = \frac{1}{8}$, ecuația (1) are rădăcina triplă $x = \frac{\pi}{4}$.

În cazul când $\lambda > \frac{1}{8}$ ecuația (7) nu are soluții reale.

Dacă, în fine, $\lambda \leq -1$, soluțiile z_1 și z_2 ale ecuației (8) au același semn fiindcă $z_1 z_2 = -16\lambda > 0$.

Soluția z_1 este totdeauna negativă sau $z_1 > 0$ pentru $\lambda > -\frac{1}{4}$, ceea ce nu este compatibil cu condiția $\lambda \leq -1$. Înseamnă că și soluția z_2 este negativă. De aceea în cazul $\lambda \leq -1$ ecuația (7) nu are soluții reale.

Astfel nu se realizează niciodată situațiile a) și c) din enunț.

Situația b) se întâlnește când $\lambda \leq 0$ și $\lambda \geq \frac{1}{8}$.

Situația d) se întâlnește când $0 < \lambda < \frac{1}{8}$.

$$\begin{aligned}
 185. \quad & 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < 1 + \frac{1}{2^3 - 2} + \frac{1}{3^3 - 3} + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{n^3 - n} = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{n(n+1)} \right] = 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

136. Cele 4000 de puncte date determină 7 998 000 segmente de diferite direcții, ale căror extremități sînt punctele date. Prin urmare, aceste segmente sînt în număr finit. Se notează cu d maximul lun-

gimii acestor segmente, maxim care, evident, există. Atunci cercul de rază $d + 1$ și avînd centrul în oricare din punctele date conține toate celelalte puncte.

Se consideră o tangentă la acest cerc astfel încît direcția sa să nu coincidă cu nici una dintre cele 7 998 000 direcții puse în evidență mai sus (unele puncte determinînd segmente de aceeași direcție, numărul total al direcțiilor poate fi mai mic decît cel al segmentelor). O astfel de tangentă există, iar punctele date sînt situate toate de o parte a acestei tangente.

Se consideră o dreaptă care se deplasează paralel cu această tangentă, astfel ca punctele date să treacă unul cîte unul de cealaltă parte a acestei drepte. Dacă se fixează poziția acestei drepte după parcurgerea a cîte patru puncte dintre cele date, se obțin 1000 de benzi paralele între ele, disjuncte și conținînd fiecare cîte patru puncte date. Patrulateralele determinate de cele patru puncte din fiecare bandă sînt cele a căror existență se cerea demonstrată.

187. Numai pe o singură latură a poligonului cu n laturi se află două vîrfuri ale poligonului cu $n + 1$ laturi. Această latură (fig. 87) va fi astfel împărțită în trei segmente, dintre care cel din mijloc, de lungime a va fi latură a poligonului cu $n + 1$ laturi. Fie $x_2^{(1)}$ și $x_1^{(1)}$ lungimile celorlalte două segmente, iar b lungimea laturii poligonului cu n laturi. Se va nota, de asemenea, lungimea segmentelor determinate pe latura i a poligonului cu n laturi de către vîrfurile i al poligonului cu $n + 1$ laturi, prin $x_1^{(i)}$ și, respectiv, $x_2^{(i)}$. Se obține în acest fel

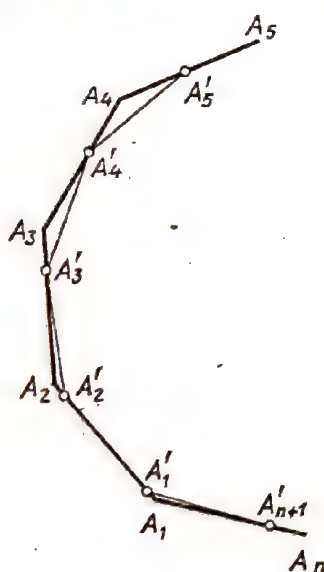


Fig. 87

$$x_2^{(1)} + x_1^{(2)} = a,$$

$$x_2^{(2)} + x_1^{(3)} = a,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_2^{(n-1)} + x_1^{(n)} = a,$$

$$x_1^{(i)} + x_2^{(i)} = b, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (2)$$

$$x_1^{(1)} + a + x_2^{(1)} = b.$$

(1)

Rezultă că $a = \frac{n}{n+1} b$. Dacă se notează $x_2^{(1)} = x$, din relația (1)

se găsește că $x_1^{(2)} = \frac{n}{n+1} b - x$, și apoi din relațiile (1) și (2) se

exprimă ca funcții polinom de gradul întâi în x toți $x_k^{(i)}$ ($i = 2, 3, \dots, n; k = 1, 2$):

$$x_1^{(i)} = \frac{n-i+2}{n+1}b - x,$$

$$x_2^{(i)} = \frac{i-1}{n+1}b + x, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b}{n+1} - x.$$

Se deduce din aceste relații dubla inegalitate $0 \leq x \leq \frac{b}{n+1}$.

Diferența ariilor celor două poligoane este dată de suma ariilor triunghiurilor decupate de laturile poligonului cu $n+1$ laturi din poligonul cu n laturi, fiind

$$S(x) = \frac{1}{2} \sin \varphi \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n+1}b + x \right) \left(\frac{n-i+1}{n+1}b - x \right). \quad (3)$$

Funcția $S(x)$ este un trinom de gradul al doilea în x . Coeficientul dominant fiind -1 , funcția S este definită pe segmentul $\left[0, \frac{b}{n+1}\right]$, iar $S(0) = S\left(\frac{b}{n+1}\right)$ și, prin urmare, $S\left(\frac{b}{2n+2}\right)$ va fi valoarea maximă iar $S(0) = S\left(\frac{b}{n+1}\right)$ va fi valoarea minimă a funcției.

Fie Q aria poligonului regulat cu n laturi, iar R aria poligonului cu $n+1$ laturi. Este evident că $R(x) = Q - S(x)$ și deci aria poligonului cu $n+1$ laturi este maximă în cazul când valoarea $S(x)$ este minimă și egală cu $S(0)$, deci când unul din vîrfurile poligonului cu $n+1$ laturi coincide cu un vîrf al poligonului cu n laturi. Aria $R(x)$ este minimă când funcția S ia valoarea maximă și anume $S\left(\frac{b}{2n+2}\right)$, în cazul când mijlocul unei laturi a poligonului cu $n+1$ laturi coincide cu mijlocul unei laturi a poligonului cu n laturi.

188. Se notează :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = y_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = y_2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = y_3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = y_4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = y_5. \end{cases} \quad (1)$$

Numerele y_i vor fi, la fel ca și x_i , numere întregi pozitive, iar

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000. \quad (2)$$

Din relațiile (1) rezultă

$$\begin{cases} 2x_1 = y_1 + y_2, \\ 2x_2 = y_2 + y_3, \\ 2x_3 = y_3 + y_4, \\ 2x_4 = y_4 + y_5, \\ 2x_5 = y_5 + y_1. \end{cases} \quad (3)$$

Se deduce din aceste ultime relații că numerele y_i au aceeași paritate, și deoarece $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1000$, înseamnă că sînt pare.

Din relațiile (3) și (2) se găsește

$$x_1 + x_3 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{2} (1000 - y_5), \quad x_2 + x_4 = \frac{1}{2} (1000 - y_1).$$

Puterea dată în enunț va fi maximă atunci cînd y_1 și y_5 vor fi minime, adică în cazul cînd $y_1 = y_5 = 2$. În consecință

$$\max(x_1 + x_3)^{x_2 + x_4} = \max \left[\frac{1}{2} (1000 - y_5) \right]^{\frac{1}{2} (1000 - y_1)} = 499^{499}.$$

Se calculează în continuare, în cîte moduri distincte se pot alege numerele întregi pozitive y_2, y_3, y_4 astfel ca $y_2 + y_3 + y_4 = 996$, $y_2 = 994 - 2k$ ($k = 1, 2, \dots, 496$). Se găsește $y_3 + y_4 = 2k + 2$, deci

$y_3 = 2, 4, \dots, 2k$, în total k posibilități. Din această cauză numărul cerut de enunț este

$$\sum_{k=1}^{496} k = \frac{1}{2} 496 \cdot 497 = 123\,256.$$

Răspuns: 123 256 moduri.

139. Fie $A_{n-1}A_0$ o porțiune pe care trenul o parcurge în sensul acelor de ceasornic, iar în punctul A_0 începe să se miște în sens contrar (fig. 88). Celelalte puncte în care se produce schimbarea sensului de mișcare vor fi A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , $A_n \equiv A_0$. Este evident că există un număr cu soț de schimbări ale sensului de parcurgere și deci numărul n este par.

Se notează respectiv cu $M_n \equiv M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ centrele arcelor $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$. Punctele M_0, M_2, M_4, \dots se află în interiorul rețelei, iar M_1, M_3, M_5, \dots în afara rețelei. În caz contrar se va modifica numerotarea cu o unitate. Se alege un sistem rectiliniu și rectangular de coordonate astfel ca A_0 să fie originea, tangenta în A_0 la arcul de cerc A_0A_1 să fie axa Ox , iar diametrul arcelor se ia drept unitate. Fie a_i abscisele punctelor A_i și m_i abscisele punctelor M_i .

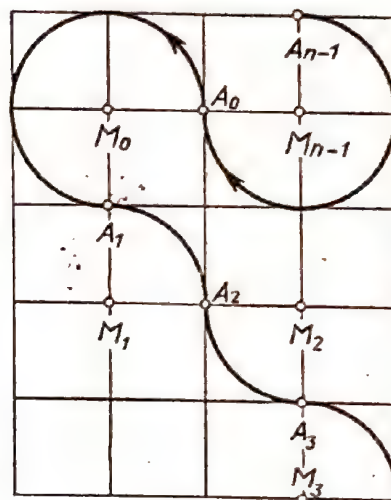


Fig. 88

Oricare ar fi arcul A_iA_{i+1} , diferența $a_i - a_{i+1}$ va fi sau $\frac{1}{2}$ sau $-\frac{1}{2}$, după cum arcul este format dintr-un sfert sau din trei sferturi de cerc. În cazul în care arcul este format din o jumătate de cerc, diferența $a_i - a_{i+1}$ este 0, 1 sau -1.

Deoarece A_i și A_{i+1} sînt mijloacele segmentelor M_iM_{i-1} și M_iM_{i+1} respectiv,

$$a_i = \frac{m_i + m_{i-1}}{2}, \quad a_{i+1} = \frac{m_{i+1} + m_i}{2}.$$

Se obține în acest fel $m_i + m_{i-1} = 2a_i$, $m_i + m_{i+1} = 2a_{i+1}$ și $m_{i-1} - m_{i+1} = 2(a_i - a_{i+1})$, ceea ce arată că diferența considerată este pară cînd arcul A_iA_{i+1} este format dintr-o jumătate de cerc și ± 1 , în cazul cînd diferența este formată dintr-un număr impar de sferturi de cerc. Fie suma

$$(m_0 - m_2) + (m_2 - m_4) + \dots + (m_{n-2} - m_n) = 0. \quad (1)$$

Deoarece drumul este închis, $m_n = m_0$. Deoarece fiecare termen din suma (1) este fie 0, fie ± 2 , fie ± 1 , înseamnă că suma conține un număr par de ± 1 , ceea ce arată că numărul de sferturi de cerc pe care trenul le parcurge în sens direct este par.

Dacă se scrie suma

$$(m_1 - m_2) + (m_3 - m_5) + \dots$$

$$\dots + (m_{n-1} - m_{n+1}) = 0,$$

se obține, în mod analog, ținând seama că $m_{n+1} = m_1$, paritatea numărului de sferturi de cerc pe care trenul le parcurge în sens contrar sensului acelor de ceasornic.

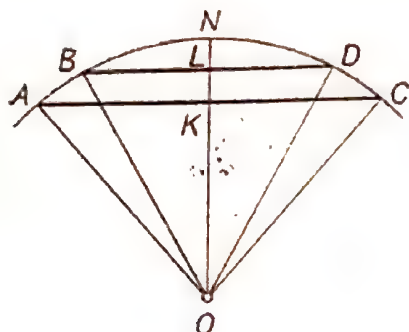


Fig. 89

Deoarece rețeaua de linii ferate este închisă, revenind în punctul inițial, trenul a parcurs un circuit complet, de aceea diferența între numărul sfer-turilor de cerc parcurse în sensul acelor de ceasornic și numărul celor parcurse în sens contrar este 4, ceea ce arată că fiecare dintre aceste numere pare dau același rest la împărțirea cu 4, acesta fiind 0 sau 2, deci suma lor este multiplu de 4, ceea ce se cerea.

190. Poligoanele regulate având n , respectiv $n + 1$ laturi se așază astfel ca apotemele $h_n = OK$ și $h_{n+1} = OL$ care corespund laturilor AC și BD să fie situate pe aceeași rază ON . Atunci KL va fi proiecția coardei AB pe raza ON . Pe arcul BN a cărui mărime este $\frac{180^\circ}{n+1}$

se pot așeza n arce egale cu arcul AB , a cărui mărime este $\frac{180^\circ}{n(n+1)}$.

Proiecțiile pe ON ale coardelor care subîntind aceste arce vor fi mai mici decât proiecția KL a arcului AB . De aceea suma LN a acestor proiecții va fi mai mică decât $n \cdot KL$, deci $R - h_{n+1} < n(h_{n+1} - h_n)$, sau $(n + 1)h_{n+1} - nh_n > R$.

191. 1) Fie x_1, x_2, x_3 lungimile laturilor triunghiului. Se deosebesc următoarele cazuri:

$$1') x_1 = x_3 \neq x_2. \text{ Din inegalitatea triunghiului rezultă că } 2x_1 > x_2. \quad (1)$$

$$1'') x_2 = x_3 \neq x_1. \text{ Aplicînd din nou inegalitatea triunghiului se obține că } 2x_2 > x_1. \quad (2)$$

$$2) x_1 = x_2 = x_3.$$

$$\text{Cazurile } 1' \text{ și } 1'' \text{ se obțin cînd } a^2 - 4ab > 0. \quad (3)$$

Fie $x_1 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ și $x_2 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Se verifică inegalitatea (1):

$$a - \sqrt{a^2 - 4b} > \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

deci $a^2 < \frac{36}{8}b$, relație care, completată cu (3), devine $4b < a^2 < \frac{36}{8}b$.

În cazul 1'' inegalitatea (1) este totdeauna satisfăcută.

Din teorema sinusurilor se obține

$$\frac{\sin \alpha_1}{x_1} = \frac{\sin \alpha_2}{x_2} = \frac{\sin \alpha_3}{x_3} = \frac{1}{2R}.$$

În cazul 1', $\sin \alpha_1 = \frac{x_1}{2R}$, $\cos \alpha_1 = \frac{x_2}{2x_1}$. Rezultă astfel că $R = \frac{x_1^2}{\sqrt{4x_1^2 - x_2^2}}$ sau $R = \frac{(a - \sqrt{a^2 - 4b})^2}{2\sqrt{(3a - \sqrt{a^2 - 4b})(a - 3\sqrt{a^2 - 4b})}}$ iar în cazul 1'' R va avea forma

$$R = \frac{(a^2 + \sqrt{a^2 - 4b})^2}{2\sqrt{(3a - \sqrt{a^2 - 4b})(a + 3\sqrt{a^2 - 4b})}}.$$

Dacă $a^2 - 4b = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{a}{2}$. În consecință triunghiul este echilateral, iar $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

192. Dacă m și $n \neq m$ sînt numere întregi, numărul $f(m) - f(n)$ este multiplu de $m - n$. Dacă numărul întreg m este diferit de k , $k + 1$, $k + 2$, numerele

$$f(m) - f(k), f(m) - f(k + 1), f(m) - f(k + 2) \quad (1)$$

sînt divizibile respectiv cu

$$m - k, m - (k + 1), m - (k + 2). \quad (2)$$

Numerele care constituie tripletul (2) sînt numere întregi consecutive, deci unul dintre acestea este multiplu de 3, ceea ce înseamnă că și unul din numerele (1) este de asemenea multiplu de 3, deci $f(m)$ va fi multiplu de 3.

193. a) Se presupune că $x_3 = 1$. În acest caz

$$x_1 x_2 = x_1 x_2 x_3 > 1, \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ sau } x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1 x_2} (x_1 + x_2).$$

Deoarece $x_1 + x_2 > 0$, rezultă $x_1 x_2 < 1$, ceea ce, conform relației (1), nu este posibil.

b) Din presupunerea $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 1$ rezultă că $x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, ceea ce contrazice a doua condiție din enunț.

c) Fie $x_3 < 1$. Din inegalitățile $x_1 x_2 x_3 > 1$, $x_3 < 1$ se deduce

$$x_1 x_2 > 1. \quad (2)$$

Cu ajutorul relației (2) se va arăta că $x_1 > 1$ și $x_2 > 1$. Relațiile $x_1 x_2 x_3 > 1$ și $x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ implică

$$x_3 > \frac{1}{x_1 x_2} \text{ sau } \frac{1}{x_3} < x_1 x_2.$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} + x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 x_2,$$

$$\frac{1}{x_1 x_2} + x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 x_2.$$

Deoarece $x_1 x_2 > 0$, se găsesc relațiile

$$1 + (x_1 + x_2)x_1 x_2 < x_1 + x_2 + (x_1 x_2)^2, \quad (3)$$

$$(1 - x_1 x_2)(1 + x_1 x_2) - (x_1 + x_2)(1 - x_1 x_2) < 0.$$

Împărțind relația (3) prin $1 - x_1 x_2 < 0$, se obțin

$$1 + x_1 x_2 - x_1 - x_2 > 0, (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0,$$

deci $x_1 > 1$ și $x_2 > 1$ ($x_1 < 1$ și $x_2 < 1$ este imposibil), ceea ce trebuia demonstrat.

194. Se presupune că punctul O se află la o depărtare mai mică decât 100 m de latura AB sau de prelungirea sa (fig. 90). Fie k cercul de rază 2 (unitatea de lungime se alege egală cu 100 m) și avînd centrul în punctul O , iar P este proiecția punctului O pe dreapta AB , $OP < 1$. Punctele A', B', C', D', E' sînt intersecțiile semidreptelor PA, PB, PC, PD și PE cu cercul k .

Se va demonstra că $S'_{A'B'C'D'E'} < 5\sqrt{3}$. Dacă se introduc notațiile

$$\sphericalangle A'OB' = \omega, \sphericalangle B'OC' = \omega_1, \sphericalangle C'OD' = \omega_2,$$

$$\sphericalangle D'OE' = \omega_3, \sphericalangle E'OA' = \omega_4 \quad (\omega_i < 180^\circ),$$

se găsește că

$$S' - S_{\Delta A'OB'} = 2(\sin \omega_1 + \sin \omega_2) + 2(\sin \omega_3 + \sin \omega_4) \leq 4 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} +$$

$$+ 4 \sin \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} \leq 8 \sin \frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{4}, \quad S' - S_{\Delta A'OB'} \leq 8 \cos \frac{\omega}{4}.$$

Deoarece $OB' = 2$, înseamnă că $\frac{2\pi}{3} < \omega < \pi$ și, evident,

$$S' - S_{\Delta A'OB'} < 4\sqrt{3}, \quad S_{\Delta A'OB'} < \sqrt{3}.$$

Rezultă astfel că $S' < 5\sqrt{3}$, ceea ce contrazice enunțul, și în consecință distanța pînă la orice latură nu este mai mică decît 1. Egalitatea are loc dacă $\omega = 120^\circ$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 60^\circ$, adică în cazul cînd pentagonul $ABCDE$ se obține dintr-un hexagon regulat prin eliminarea unuia din vîrfuri (fig. 91).

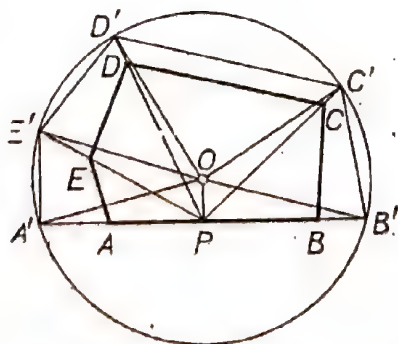


Fig. 90

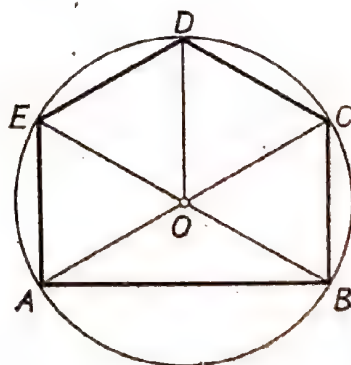


Fig. 91

195. Fie $k_1 \geq \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor, k_2 \geq \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor, \dots, k_p \geq \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor,$

$$k_{p+1} < \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor, k_{p+2} < \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor, \dots, k_n < \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor.$$

1) Dacă $p = n$, proprietatea cerută este evidentă. Dacă $p = 0$, s-ar obține $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n < n \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \leq k$, ceea ce ar fi imposibil.

2) Fie $0 < p < n$. În acest caz există numerele întregi nenegative l_1, l_2, \dots, l_p astfel încât

$$k_i = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + l_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

și numerele întregi nenegative m_j astfel ca

$$k_j = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor - m_j, \quad j = p+1, p+2, \dots, n,$$

și, în consecință,

$$k = \sum_{j=1}^n k_j = n \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + \sum_{i=1}^p l_i - \sum_{j=p+1}^n m_j.$$

Deoarece $n \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \leq k$, se obține $\sum_{i=1}^p l_i \geq \sum_{j=p+1}^n m_j$. (1)

În continuare se exprimă $k_i!$ și $k_j!$ sub forma

$$k_i! = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor! \left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + 1 \right) \dots \left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + l_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$k_j! = \left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor - m_j \right)! = \frac{\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor!}{\left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor - m_j + 1 \right) \dots \left(\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor - 1 \right) \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor}.$$

deci $k_1! k_2! \dots k_n! = \left(\left[\frac{k}{n} \right]! \right)^n \cdot \frac{A}{B}$. Prin A s-a notat produsul celor $\sum_{i=1}^p l_i$ factori care sînt mai mari decît $\left[\frac{k}{n} \right]$, iar prin B s-a notat produsul celor $\sum_{j=p+1}^n m_j$ factori nenegativi dintre care cel mai mare este $\left[\frac{k}{n} \right]$. Din (1) rezultă cã $\frac{A}{B} \geq 1$ și deci $k_1! k_2! \dots k_n! \geq \left(\left[\frac{k}{n} \right]! \right)^n$ ($k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$), ceea ce se cerea demonstrat.

196. Fie numerele întregi x, y, z , astfel ca $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$. Restul împărțirii lui 1969^2 la 9 este 4. Vor fi cercetate resturile care se obțin prin împărțirea la 9 a numerelor de forma x^3 .

Cazul 1. $x = 3k$. Restul împărțirii lui x^3 la 9 va fi $r = 0$.

Cazul 2. $x = 3k + 1$. Atunci $x^3 = 3^3k^3 + 3 \cdot 3^2k^2 + 3 \cdot 3k + 1$. Restul considerat este $r = 1$.

Cazul 3. $x = 3k - 1$. Atunci $x^3 = 3^3k^3 - 3 \cdot 3^2k^2 + 3 \cdot 3k - 1$. Restul respectiv va fi $r = 8$.

Prin împărțirea numerelor x^3, y^3, z^3 la 9 se obțin resturile 0, 1 sau 8. Dacă se împarte la 9 suma $r_1 + r_2 + r_3$, cei trei termeni avînd valorile 0, 1 sau 8, nu se poate obține niciodată restul 4, ceea ce demonstrează enunțul.

197. Dacă în ecuația dată se consideră $y = x$, se obține

$$2xf(x) = 2xf^2(x),$$

deci dacă $x \neq 0$, atunci $f(x) = f^2(x)$, ceea ce atrage după sine fie $f(x) = 0$, fie $f(x) = 1$.

Dacă $f(a) = 0$ pentru $x = a = 0$, ecuația dată implică $af(y) = 0$, pentru oricare valoare a lui y , adică $f(x) \equiv 0$.

Dacă $f(a) = 1$ pentru $x = a \neq 0$, din ecuația dată se obține că $y = yf(y)$, deci $f(y) = 1$ pentru $y \neq 0$, iar pentru $y = 0$, $f(0) = c$, c fiind un număr arbitrar.

Soluțiile ecuației funcționale date sînt deci $f(x) \equiv 0$ și orice funcție de forma $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$

Numai funcțiile $f(x) \equiv 0$ și $f(x) \equiv 1$ dau rezolvarea problemei în funcții continue.

198. Fie F unul din poligoanele convexe arbitrare. Se consideră mulțimea \bar{F} de puncte care sînt situate la o distanță care nu depășește 1 cm cel puțin față de una din laturile poligonului. Dacă poligonul are n laturi, mulțimea \bar{F} va conține afară de punctele poligonului F , n dreptunghiuri ale căror baze vor fi laturile poligonului, iar înălțimile vor avea lungimea 1 cm și n sectoare circulare de rază 1 cm avînd centrele în vîrfurile poligonului (v. problema 121).

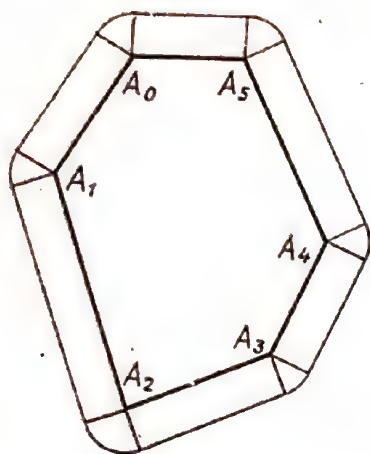


Fig. 92

Figura 92 descrie mulțimea \bar{F} în cazul cînd F este un hexagon convex. Este evident că dacă un punct nu aparține mulțimii \bar{F} , cercul avînd centrul în acest punct și rază 1 cm nu va intersecta poligonul F .

Pentru a calcula aria figurii \bar{F} se consideră poligonul convex F cu n laturi. Sectorul circular cu centrul în A_k va avea aria $\frac{\pi(180^\circ - \alpha_k)}{360^\circ}$, α_k fiind unghiul din vîrfurile A_k .

Dacă se adună ariile tuturor sectoarelor, se găsește

$$\frac{\pi}{360^\circ} [n 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)].$$

Deoarece suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $(n - 2) \cdot 180^\circ$, suma ariilor tuturor sectoarelor circulare va fi π cm². Pe de altă parte, suma ariilor tuturor dreptunghiurilor va fi egală cu perimetrul P_F al poligonului.

Aria figurii \bar{F} va fi, în final $S_{\bar{F}} = S_F + \pi + P_F$, S_F fiind aria poligonului F .

Fiindcă $S_{\bar{F}} \leq \pi$ și $P_F \leq 2\pi$, prin enunț, rezultă că

$$S_{\bar{F}} \leq \pi + \pi + 2\pi = 4\pi.$$

Mulțimea tuturor punctelor situate la distanța de 1 cm de laturile pătratului dat și în interiorul acestuia va fi dată de pătratul \bar{K} avînd latura de lungime egală cu 36 cm.

Suma ariilor figurilor \bar{F} care se obțin prin considerarea tuturor celor o sută de poligoane care se așează peste pătratul \bar{K} nu va depăși 400π , adică va fi mai mică decît 1260 cm², iar aria pătratului \bar{K} este de 1296 cm².

Se găsește astfel, evident, un punct situat față de laturile poligonului și cele ale pătratului dat la o distanță mai mare decît 1.

199. Un calcul simplu arată că raza sferei înscrise în tetraedru regulat de înălțime 1 este $\frac{1}{4}$. Se va arăta că această sferă încapă în orice tetraedru care nu are nici o înălțime mai mică decât 1. Este suficient pentru aceasta să se arate că locul geometric al punctelor interioare tetraedrului, situate la o distanță mai mare de $\frac{1}{4}$ de fețele sale, nu este format din mulțimea vidă. Un plan paralel cu una dintre fețe și aflat la o distanță de $\frac{1}{4}$ de această față separă din tetraedru mulțimea punctelor apropiate de fața respectivă la o distanță mai mică decât $\frac{1}{4}$. Rămâne astfel un tetraedru ale cărui înălțimi sînt toate mai mari sau egale cu $\frac{3}{4}$. Din acesta se separă o parte cu ajutorul unui plan paralel cu a doua față, la distanța $\frac{1}{4}$ de aceasta. Rămîne un tetraedru ale cărui înălțimi sînt toate mai mari sau egale cu $\frac{1}{2}$ și cu care se procedează în continuare analog. Se obține astfel un tetraedru ale cărui înălțimi nu sînt mai mici decât $\frac{1}{4}$. În interiorul său se află un punct situat la o distanță de cea de a patra față care nu este mai mică decât $\frac{1}{4}$. Se observă că, prin construcție, acest punct nu se află la o distanță mai mică decât $\frac{1}{4}$ de celelalte fețe ale tetraedrului inițial. Înseamnă că acesta este punctul căutat, sfera de rază $\frac{1}{4}$ care îl are ca centru fiind inclusă în întregime în tetraedru inițial.

Deoarece este evident că nu se poate așeza o sferă de rază mai mare decât $\frac{1}{4}$ într-un tetraedru regulat avînd înălțimea 1, raza maximă căutată este $\frac{1}{4}$.

200. Se notează unghiurile formate de semidreptele OX și OY , respectiv de semidreapta OZ cu planul OXY prin α , respectiv β

(fig. 93). Se obține, în urma unui calcul simplu, că volumul tetraedrului $OABC$ este

$$\frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \alpha \sin \beta.$$

Aceasta înseamnă că pentru a găsi volumul minim este necesar ca planul de secțiune ABC să fie dus astfel ca produsul $OA \cdot OB \cdot OC$ să fie minim.

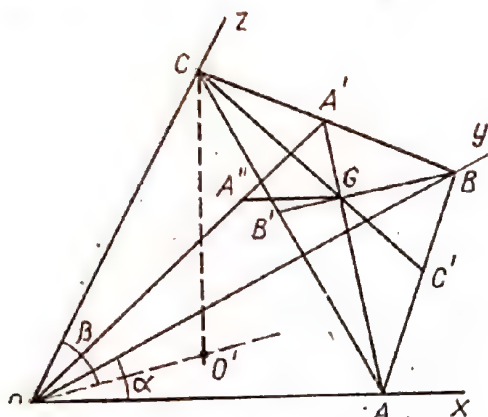


Fig. 93

Se prelungesc segmentele AG , BG și CG dincolo de punctul G pînă la intersecția laturilor BC , AC și AB în punctele A' , B' , respectiv C' . Prin punctul G se duce o dreaptă paralelă cu OA , care intersectează segmentul OA' în punctul A'' . Se obține $\frac{OA}{GA''} =$

$$= \frac{AA'}{GA'}, \text{ adică } OA = \frac{AA'}{GA'} \cdot GA'', \text{ unde}$$

GA'' este de lungimi constantă, independent de poziția punctelor A , B și C . Expresiile analoage se găsesc

pentru OB și OC . Pentru a găsi minimul produsului $OA \cdot OB \cdot OC$ trebuie găsit minimul produsului $\frac{AA'}{GA'} \cdot \frac{BB'}{GB'} \cdot \frac{CC'}{GC'}$ sau maximul

$$\text{produsului } \frac{GA'}{AA'} \cdot \frac{GB'}{BB'} \cdot \frac{GC'}{CC'}. \text{ Însă } \frac{GA'}{AA'} = \frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta ABC}}, \frac{GB'}{BB'} = \frac{S_{\Delta GAC}}{S_{\Delta ABC}},$$

$$\frac{GC'}{CC'} = \frac{S_{\Delta GAB}}{S_{\Delta ABC}}. \text{ Efectuînd suma acestora, se găsește } \frac{GA'}{AA'} + \frac{GB'}{BB'} +$$

$$+ \frac{GC'}{CC'} = 1. \text{ Însă produsul a trei numere nenegative care au suma}$$

constantă este maxim cînd cele trei numere sînt egale între ele (citorul este îndemnat să facă această demonstrație). Astfel, volumul tetraedrului $OABC$ este minim dacă

$$\frac{GA'}{AA'} = \frac{GB'}{BB'} = \frac{GC'}{CC'} = \frac{1}{3}.$$

Continuarea demonstrației se reduce la următoarea problemă bine-cunoscută de geometrie plană: prin punctul G aflat în interiorul

unghiului format de semidreapta OX cu dreapta de intersecție a planelor OBC și OXG se cere construit segmentul AA' astfel încât G să îl împartă într-un raport dat. Se găsește astfel punctul A , iar punctele B și C se obțin analog.

201. Se verifică ușor că numărul dat este soluție a ecuației $x^3 + 3x - 4 = 0$. Întrucît

$$x^3 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 + x + 4),$$

singura rădăcină reală a ecuației este 1 și, prin urmare, numărul dat este 1.

202. Proiectînd ortogonal cercul pe podea, se obține o elipsă cu semiaxele 1 și $\cos \theta$, θ fiind înclinarea planului cercului față de podea. Dacă punctul O materializează colțul respectiv, M este centrul cercului, iar M' proiecția acestui centru pe podea, conform cu teorema lui Monge se scrie

$$M'O^2 = 1 + \cos^2 \theta.$$

În afară de aceasta, $MM' = \sin \theta$, deci

$$OM^2 = 1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 2,$$

ceea ce înseamnă că centrul M al cercului se află pe sfera de rază $\sqrt{2}$ cu centrul în O , de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Centrul cercului nu poate fi însă mai îndepărtat de planele care formează colțul, decît raza cercului, adică 1, condiții care se scriu în coordonate carteziane: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ și $0 \leq z \leq 1$.

Se remarcă, în final, că toate punctele sferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ care satisfac aceste condiții intră în alcătuirea locului geometric căutat. Fie un z oarecare, $0 \leq z \leq 1$. Însă $z = \sin \theta$. Este evident că se poate realiza o astfel de înclinare a cercului pe planul podelei. Dacă se fixează $z = \sin \theta$, proiecțiile punctelor sferei (x, y, z) pe planul xOy în condițiile $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ formează un arc de cerc de ecuație $x^2 + y^2 = 1 + \cos^2 \theta$, inclus în pătratul $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Punctele extreme ale acestui arc de cerc se găsesc pentru acele poziții ale cercului în care axele elipsei după care se proiectează cercul pe podea sînt paralele cu axele Ox și Oy . Punctele interioare ale acestui arc de cerc se obțin atunci cînd cercul trece continuu de la una din aceste poziții la cealaltă.

203. Rezultă din aceste condiții că $\angle BAD \geq 90^\circ$ (fig. 94). Dacă punctul A este situat în afara sferei pline K , unghiul sub care aceasta este văzută din A nu este mai mic decât $\angle BAD$. Se calculează fără dificultăți că $AO \leq r\sqrt{2}$, O fiind centrul sferei K iar r raza sa. În

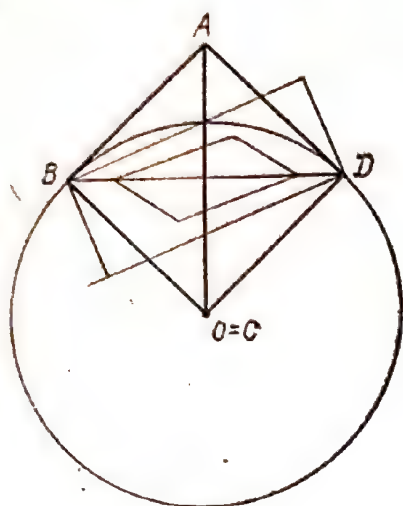


Fig. 94

acest fel, mulțimea căutată de vîrfuri se găsește într-o sferă plină de rază $r\sqrt{2}$ și cu centrul în O . Se arată ușor că toate punctele acestei sfere aparțin mulțimii căutate. Pentru punctele care sînt situate în interiorul lui K afirmația este evidentă. În cazul cînd punctul A este exterior sferei se consideră cercul mare rezultat prin secționarea acesteia cu un plan care trece prin OA . Tangentele din A la acest cerc vor fi AB și AD , determinînd astfel punctele B și D .

204. Se verifică ușor că aria S a triunghiului avînd vîrfurile $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ și $C(c_1, c_2)$ se calculează prin formula

$$2S = \pm[(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)]. \quad (1)$$

Coordonatele punctelor P_i vor fi întregi și luate modulo 2. Atunci acestea se reduc la patru tipuri de perechi: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ și $(1, 1)$. De aceea cel puțin coordonatele a două puncte P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) coincid (modulo 2). Conform cu formula (1) dublul ariei unui triunghi care are aceste două puncte ca vîrfuri va fi un număr par și S va fi, în consecință, întreg. Este clar însă că printre triunghiurile cu vîrfurile în punctele P_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) există trei cu vîrfurile în cele două puncte date și au aria exprimată deci prin numere întregi.

205. Dacă se dă un cerc de rază r și cu centrul în punctul O , fiecărui punct P diferit de O i se poate pune în corespondență un punct P' , situat pe dreapta OP de o aceeași parte cu O ca și P , astfel încît $OP' = \frac{r^2}{OP}$. Punctul P' va fi denumit în mod natural

punct simetric al punctului P față de cerc. Considerîndu-se o altă pereche de puncte Q și Q' , simetrice față de cerc, triunghiurile OPQ și $OP'Q'$ sînt asemenea, deci

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ},$$

ceea ce arată că

$$P'Q' = PQ \frac{r^2}{OP \cdot OQ}.$$

Se consideră în continuare sfera de rază $\sqrt{AB \cdot AC \cdot AD}$ avînd centrul în punctul A . Fie A', B', C' punctele simetrice ale punctelor A, B, C , față de sfera dată. Folosind formula obținută mai sus, se constată ușor că $C'D' = x$, $B'D' = y$, $B'C' = z$, deci triunghiul $B'C'D'$ este cel căutat.

206. Pe baza identităților $S_n \equiv S_{-n}$ și $S_1 S_n \equiv S_{n+1} + S_{n-1}$ este suficient să se demonstreze că $S_1 = a + a^{-1}$ este număr întreg. Fără a restringe generalitatea, se poate presupune că $a > 1$ și $k > 1$. Se obțin ușor formulele

$$a^k = \frac{S_k + \sqrt{S_k^2 - 4}}{2}, \quad a^{-k} = \frac{S_k - \sqrt{S_k^2 - 4}}{2},$$

$$a^{k+1} = \frac{S_{k+1} + \sqrt{S_{k+1}^2 - 4}}{2}, \quad a^{-k-1} = \frac{S_{k+1} - \sqrt{S_{k+1}^2 - 4}}{2}.$$

Înlocuind aceste valori în identitățile

$$S_1 = a^{k+1} a^{-k} + a^k a^{-k-1} \text{ și } (a^k)^{k+1} = (a^{k+1})^k,$$

se obține

$$S_1 = \frac{S_k S_{k+1} - \sqrt{(S_k^2 - 4)(S_{k+1}^2 - 4)}}{2} \quad (1)$$

și

$$\left(\frac{S_k + \sqrt{S_k^2 - 4}}{2} \right)^{k+1} = \left(\frac{S_{k+1} + \sqrt{S_{k+1}^2 - 4}}{2} \right)^k.$$

Desfăcînd parantezele în ultima egalitate, aceasta ia forma

$$r + s \sqrt{S_k^2 - 4} = u + v \sqrt{S_{k+1}^2 - 4},$$

r, s, u, v fiind numere raționale pozitive. Înseamnă că

$$(s \sqrt{S_k^2 - 4} - v \sqrt{S_{k+1}^2 - 4})^2 = (u - r)^2,$$

deci

$$\sqrt{(S_k^2 - 4) \cdot (S_{k+1}^2 - 4)} = \frac{R}{sv},$$

R fiind un număr rațional. Se deduce cu ușurință că $\sqrt{(S_k^2 - 4)(S_{k+1}^2 - 4)}$ este număr întreg.

Dacă unul din numerele S_k și S_{k+1} este par, numerele $S_k S_{k+1}$ și $(S_k^2 - 4)(S_{k+1}^2 - 4)$ sînt ambele pare. Dacă numerele S_k și S_{k+1} sînt ambele impare, numerele $S_k S_{k+1}$ și $(S_k^2 - 4)(S_{k+1}^2 - 4)$ sînt ambele impare.

În fiecare caz numărătorul expresiei (1) este întreg și par, deci S_1 este număr întreg.

207. Deoarece $2^{147} - 1 = 8^{49} - 1 = (8 - 1)(8^{48} + 8^{47} + \dots + 1)$, iar $343 = 7^3$, este suficient să se demonstreze că $8^{48} + 8^{47} + \dots + 1$ se divide prin 49, ceea ce se verifică ușor prin dezvoltarea fiecărui termen de forma 8^m cu ajutorul binomului lui Newton: $8^m = (7 + 1)^m$.

208. Se notează $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$, $\operatorname{tg} \gamma = z$. Se verifică ușor că

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{x + y + z - xyz}{1 - (xy + xz + yz)}.$$

Numărătorul ultimei fracții este nul, conform enunțului, numitorul este diferit de zero, deoarece în caz contrar numerele x , y , z ar fi soluții ale ecuației

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + \lambda - a = 0,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $\lambda^3 - a\lambda^2 + \lambda - a = (\lambda^2 + 1)(\lambda - a)$. Astfel $\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, adică $\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{\pi}$, și de asemenea $3(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \pmod{\pi}$. Rezultă

$$\operatorname{tg}(3\alpha + 3\beta + 3\gamma) = 0.$$

Continuarea se face ținînd seama de tangenta unghiului triplu.

209. Un cuvînt care nu cuprinde combinații interzise de litere se va numi admis. Se notează cu a_n numărul cuvintelor admise de lungimea n . Se observă că prin adăugarea la dreapta unui cuvînt admis a oricăreia dintre cele trei litere ale alfabetului se obține sau un cuvînt admis de lungime $n + 1$, sau un cuvînt care se termină cu o combinație interzisă. Se obține în acest fel inegalitatea

$$a_{n+1} \geq 3a_n - a_{n-1} - a_{n-2} - \dots - a_2 - a_1 - 1,$$

din care, folosind, de exemplu, inducția matematică, se poate găsi că

$$a_n > \sum_{k=0}^{n-1} a_k \text{ și } a_n > 2^n, \text{ dacă } n \geq 1.$$

210. Minimul care figurează în enunț se notează cu μ^2 și se consideră, fără a restrânge generalitatea, că $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_5$. În acest caz $a_{i+1} - a_i \geq \mu > 0$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$. În consecință

$$(a_j - a_i)^2 \geq (j - i)^2 \mu^2.$$

Se observă că $\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i - a_j)^2 = 5 \sum_{i=1}^5 a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^5 a_i \right)^2$, ceea ce implică $\mu^2 \frac{5^2(5^2 - 1)}{12} = \mu^2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (i - j)^2 \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i - a_j)^2 \leq 5$, deci $\mu \leq \frac{1}{10}$.

Problema poate fi generalizată pentru cazul a n numere.

211. Se observă că punctele $P_1(i, j)$, $P_2(k, m)$, $P_3(k + m - j, m + i - k)$, $P_4(i + m - j, j + i - k)$ sînt vîrfurile unui pătrat inclus în pătratul de vîrfuri $(1, 1)$, $(1, n)$, $(n, 1)$ și (n, n) , dacă i, j, k, m verifică relațiile din enunț. Se precizează că unghiul $P_1P_2P_3$ are același sens ca și unghiul xOy . Pătratul $P_1P_2P_3P_4$ are vîrfurile situate pe laturile unui pătrat Q , ale cărui vîrfuri au coordonate întregi cuprinse între 1 și n și ale cărui laturi sînt paralele cu axele. Există r^2 pătrate Q de latură $n - r$, fiecărui asemenea pătrat Q corespunzîndu-i $4(n - r)$ pătrate $P_1P_2P_3P_4$, deci tot atîtea soluții ale sistemului din enunț, dacă $n - r > 0$, și un singur pătrat $P_1P_2P_3P_4$ degenerat la un punct, dacă $n - r = 0$. Fiindcă $m - r \leq n - 1$, numărul de soluții va fi

$$\sum_{r=1}^{n-1} 4r^2(n - r) + n^2.$$

Calculînd această expresie, se obține $\frac{1}{3} n^2(n^2 + 2)$.

212. Se notează cu $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$, $x_4^{(n)}$ unghiurile OA_nB_n , OB_nC_n , OC_nD_n , OD_nA_n respectiv, iar cu $y_1^{(n)}$, $y_2^{(n)}$, $y_3^{(n)}$, $y_4^{(n)}$ unghiurile OA_nD_n , OB_nA_n , OC_nB_n , respectiv OD_nC_n . Considerînd patru-latre inscriptibile, se constată că $x_1^{(n+1)} = x_2^{(n)}$, $x_2^{(n+1)} = x_3^{(n)}$, $x_3^{(n+1)} =$

$= x_4^{(n)}$, $x_4^{(n+1)} = x_1^{(n)}$ iar $y_i^{(n+1)} = y_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Deci $x_1^{(n+2)} = x_3^{(n)}$, $x_1^{(n+3)} = x_1^{(n)}$, $x_4^{(n+4)} = x_1^{(n)}$ ș.a.m.d., ceea ce arată că patrulateralele $A_0B_0C_0D_0$ și $A_4B_4C_4D_4$ se descompun în triunghiuri asemenea și la fel așezate, ceea ce trebuia demonstrat.

213. Fiindcă raza cercului nu este mai mică decât 2, există cel puțin patru puncte interioare cercului care aparțin rețelei. Mulțimea punctelor din rețea situate în interiorul cercului formează un poligon, al cărui contur are unghiuri interioare de 90° , 180° , 270° și eventual chiar 0° , ultimele fiind în mod necesar încadrate de două unghiuri de 270° și nu de 180° , deci poligonul nu poate avea „țepi” care ies în afară mai lungi de 1. Toate laturile conturului au fost unghiuri de 270° și un de 180° , deci poligonul nu poate avea „țopi” care ies în afară mai lungi de 1. Toate laturile conturului au fost considerate de lungime 1 iar punctul alăturat unei „țepi” se consideră de două ori vîrf.

Punctele de frontieră interioare sînt cele de pe contur, în afară de cele în care unghiul este de 270° , deci numărul lor este egal cu perimetrul p al conturului din care se scade numărul q al unghiurilor de 270° . În mod analog se descriu punctele de frontieră exterioare, al căror număr este egal cu perimetrul p' al unui contur care „înfășoară” conturul precedent, minus numărul q' de unghiuri de 90° ale aceluiași contur. Se observă că q' este egal cu numărul de unghiuri de 90° din conturul interior, plus de două ori numărul de unghiuri de 0° ale acestuia, deci $q' - q$ este dat de suma diferențelor dintre 180° și unghiurile interioare ale poligonului interior, care se știe că este 360° , împărțită la 90° , adică $q' - q = 4$. Pe de altă parte, la fiecare unghi de 90° al poligonului interior, perimetrul celui exterior „cîștigă” două unități, la fiecare unghi de 270° „pierde” 2 unități, iar la fiecare unghi de 0° „cîștigă” 4 unități, deci $p' - p = 2(q' - q) = 8$. Diferența dintre numărul de puncte frontieră exterioare și interioare este deci $p' - q' - (p - q) = 8 - 4 = 4$.

214. Fie direcția D din plan. Figura F care se cere este mărginită, deci este conținută într-o bandă B determinată de două drepte paralele D_1 și D_2 avînd direcția D . Întrucît figura F este închisă, dreptele D_1 și D_2 pot fi astfel alese încît să conțină cel puțin cîte un punct P_1 , respectiv P_2 din F . Este necesar ca $P_1P_2 \perp D$, deoarece în caz contrar ambele semicercuri cu extremitățile în punctele P_1 , P_2 ar depăși frontierele lui B . Fie semicercul S cu extremitățile în P_1 , P_2 , conținut în F . Dacă punctul Q se află pe S și este diferit de punctul P_1 și de punctul P_2 , atunci numai unul dintre cele două

semicercuri care îl unesc pe acesta cu P_1 nu iese afară din B și anume cel situat în interiorul C al cercului determinat de S . Conform ipotezei care se face asupra lui F , acest cerc este inclus în întregime în F . Când Q parcurge semicercul S , cu excepția lui P_1 , semicercul care îl unește cu P_1 și este situat în discul mărginit de S umple tot acest interior. Mulțimea F fiind închisă, rezultă că $F \supset C$. Mai mult, $F = C$ (discul închis C) fiind altfel s-ar putea alege o altă direcție D' găsind în acest mod două puncte P'_1 și P'_2 ca mai sus, iar $P'_1 P'_2 > P_1 P_2$. Permutând direcțiile D , D' , se ajunge la contradicție.

Se verifică imediat că orice disc închis satisface enunțul.

215. Demonstrația propoziției din enunț se face prin inducție completă. Pentru $n = 1$ propoziția este adevărată. Se observă că numai la construirea lui $w_{2^{n-1}}$ se găsește $j = n$, deci se înlocuiește $a_n = 0$ cu $a_n = 1$. În rest algoritmul acționează în cazul n la fel ca și în cazul $n - 1$ asupra primelor $n - 1$ cifre (evident, pentru $m > 2^{n-1}$, ca și cum în locul lui m ar fi $m - 2^{n-1}$ ș.a.m.d.).

216. Se alege f ca produsul tuturor polinoamelor de forma $a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_{n-1} + x_n$, în care $a_1 = \pm 1, \dots, a_{n-1} = \pm 1$, cu excepția lui $x_1 + \dots + x_n$. Pentru a arăta că produsul dintre f și $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ conține numai puteri pare ale variabilelor se arată că el nu se schimbă înlocuind x_i prin $-x_i$. Când $i = 1, 2, \dots, n - 1$, acesta este evident, iar pentru $i = n$ acesta rezultă schimbînd semnele tuturor factorilor în produsul obținut, factori care sînt în număr par 2^{n-1} pentru $n > 1$. Dacă $n = 1$ se ia $f(x) = x$. Relația din enunț este în consecință satisfăcută pentru orice n .

217. Există 2^n șiruri de forma celor din enunț. Fie $cB = \{x = cb \mid b \in B\}$. Fie mulțimea $M_c = \{(c, b), b \in cB \cap B\}$. Fiecărui element $b \in B$ îi corespund k perechi din M_c , de aceea M_c are k^2 elemente. Dacă în orice $cB \cap B$ sînt cel puțin m elemente, atunci fiecărui c îi corespund cel puțin m perechi din M_c , deci M_c are cel puțin $m \cdot 2^n$ elemente, adică $m \cdot 2^n \leq k^2$ ș.a.m.d.

218. Dacă un plan trece prin trei puncte ale lui E , acesta va mai conține cel puțin încă un punct din E . Dacă se poate alege acest plan astfel ca să conțină patru puncte din E care să fie vîrfurile unui patrulater convex care nu conține în interior alte puncte din E , problema se rezolvă luînd un punct din E în afara acestui plan, apoi, dacă există, un punct din E diferit de cele cinci puncte aparținînd piramidei respective ș.a.m.d., pînă cînd procedeul se oprește datorită finititudinii lui E .

Alegerea planului se face în modul următor. Se consideră toate perechile (A, P) , A fiind un punct al mulțimii E și P un plan care conține cel puțin trei puncte din E dar nu conține punctul A . Se alege o astfel de pereche (A, P) încât distanța de la A la P să fie minimă. Fie punctele A_1, A_2, A_3, A_4 situate în $P \cap E$. Se presupune că unul din acestea, fie A_1 , este situat în interiorul triunghiului care are ca vîrfuri pe celelalte trei, iar în acel triunghi nu mai există puncte din E . Dacă se obține o contradicție, pe baza primului alineat problema este rezolvată.

Fie B proiecția punctului A pe planul P . Distanțele de la B la planele $AA_2A_3, AA_3A_4, AA_4A_2$ vor fi cel mult egale cu distanța de la A la planul P și cel puțin una dintre acestea este mai mică decît această ultimă distanță, deoarece în caz contrar BA ar fi perpendiculară pe toate cele trei plane. Din modul de alegere al lui (A, P) rezultă că distanțele de la A_1 la cele trei plane trebuie să fie mai mari sau egale cu distanța de la A la P . Se observă că distanțele de la diferitele puncte dintr-un plan la alt plan sînt de același ordin de mărime ca și distanțele acelor puncte la dreapta de intersecție a celor două plane. Se deduce astfel că distanțele de la A_1 la A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 sînt respectiv mai mari sau egale cu distanțele corespunzătoare de la B , inegalitatea fiind strictă cel puțin în unul din cazuri. O asemenea situație este însă compatibilă cu faptul că A_1 este situat în interiorul triunghiului $A_2A_3A_4$.

219. Deoarece x_i este număr întreg, rezultă că $x_{i+1} = \left\lfloor \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{n}{x_i} \right) \right\rfloor$. Din relațiile $\frac{1}{2} \left(x + \frac{n}{x} \right) - \sqrt{n} = \frac{1}{2} \frac{(x - \sqrt{n})^2}{x}$ și $x_1 > \sqrt{n}$ se deduce că $\min(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq [\sqrt{n}]$.

Se presupune, contrar ipotezei, că $x_i \geq [\sqrt{n}] + 1$, pentru $i = 1, 2, \dots, n$. Se definește $x'_1 = x_1, x'_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x'_i + \frac{n}{x'_i} \right)$. Deoarece

funcția $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{n}{x} \right)$ este crescătoare dacă $x \geq \sqrt{n}$ (fapt care se verifică pornind direct de la definiție), rezultă că $x_i \leq x'_i$ drept consecință a relației $x_i > \sqrt{n}$. Folosind de mai multe ori una din relațiile de mai sus, se găsește că $x'_{n-1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2^{n-2}} (n - \sqrt{n}) < \frac{n-1}{2^{n-2}} \leq 1$, deci $x_{n-1} - [\sqrt{n}] \leq 1$. Rămîne de arătat că dacă se

notează $a = [\sqrt{n}]$, este adevărată inegalitatea $\frac{1}{2} \left(a + 1 + \frac{n}{a+1} \right) < a + 1$, ceea ce înseamnă că $n < (a + 1)^2$, adică $\sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1$, deci $x_n = [\sqrt{n}]$ etc.

220. Pentru ca media aritmetică a trei numere întregi să fie un număr întreg este necesar și suficient ca acestea să fie în unul din următoarele cazuri:

1) Restul obținut prin împărțirea fiecărui dintre aceste numere la 3 este același.

2) Prin împărțirea fiecăruia dintre aceste numere la 3 se găsesc resturile 0, 1, 2.

Un punct din plan care are ambele coordonate exprimate prin numere întregi aparține la una din cele nouă clase determinate de resturile împărțirii coordonatelor sale prin 3. Dacă o mulțime E are proprietățile din enunț, nu poate avea mai mult de două puncte în aceeași clasă (ambele coordonate se află în primul caz de mai sus).

Fie F mulțimea claselor în care există puncte din E . Dacă E are mai mult de șase elemente, atunci în F vor exista două clase (a, b) , (\bar{a}, b_1) cu $b \neq b_1$ și două clase (a_1, b_2) , (a_2, b_2) cu $a_1 \neq a_2$.

a) Dacă $a \neq a_1$, $a \neq a_2$, $b \neq b_2$, $b_1 \neq b_2$, atunci $(a, b_2) \notin F$ (cazul 1 pentru abscise și cazul 2 pentru ordonate) și $(a_1, b_1) \notin F$ (cazul 2 la ambele coordonate, cu (a, b) , (a_2, b_2)). Deoarece a_1 și a_2 au roluri simetrice ca și b cu b_1 , rezultă că $F = \{(a, b), (a, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$.

b) Dacă, de exemplu, $a = a_2$ (dacă nu are loc situația a), se poate presupune egalitatea adevărată făcând eventual o schimbare de axe sau de notații), atunci $b_2 \neq b$, $b_2 \neq b_1$ conduce la contradicție (cazul 1 pentru abscise, cazul 2 pentru ordonate). Se presupune, eventual schimbând notațiile, că $b = b_2$, deci $(a, b) \in F$, $(a, b_1) \in F$ și $(a_1, b) \in F$. Fie \bar{a} și \bar{b} clasele care nu au intervenit. F nu va putea conține (a, \bar{b}) , (\bar{a}, b) (cazul 1 pentru una din coordonate, 2 pentru cealaltă) și nici (\bar{a}, \bar{b}) (cazul 2 pentru ambele coordonate, cu (a, b_1) , (a_1, b)). Este posibil ca $(a_1, b_1) \in F$, însă atunci $(\bar{a}, b_1) \notin F$, $(a_1, b) \notin F$ (cazul 1 pentru o coordonată, cazul 2 pentru cealaltă) și deci $F = \{(a, b), (a, b_1), (a_1, b), (a_1, b_1)\}$. Este posibil și $(a_1, \bar{b}) \in F$, însă atunci $(a_1, b_1) \notin F$ (cazul 1 pentru abscise, cazul 2 pentru ordonate), și $(a_1, b_1) \notin F$ (cazul 2 pentru ambele coordonate, cu (a, b) , (a_1, \bar{b})) și deci $F = \{(a, b), (a, b_1), (a_1, b), (a_1, b_1)\}$. Rezultă că E nu poate conține mai mult de opt elemente. Această situație se poate realiza considerînd, în oricare dintre cele trei situații posibile pentru F , cîte două puncte în fiecare clasă din F .

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR DATE LA OLIMPIADE NAȚIONALE

221. Fie (a_i, b_i) dimensiunile celui de-al i -lea dreptunghi. În acest caz

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = n^2 - 1, \quad (1)$$

a_i și b_i fiind numere pozitive diferite între ele, mai mari decât 1.

Se va găsi cea mai mică valoare a lui n . Se iau cele mai mici numere care satisfac condițiile problemei și anume: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dintre toate sumele de forma (1) suma

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 100 \quad (2)$$

va fi cea mai mică. Orice schimbare a factorilor care intervin sau mărire a acestora duce la mărirea sumei. Din această cauză cea mai mică dintre valorile posibile pentru n va fi $n = 11$. Se arată, în continuare, că există astfel de (a_i, b_i) încît $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 120$. Primul termen din suma (2) se înlocuiește cu $2 \cdot 19$, iar ceilalți termeni nu suferă nici o modificare. Dreptunghiurile avînd laturile $(2, 19)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$ satisfac condițiile problemei.

Se arată, mai departe, că pentru orice $n > 11$ se poate indica o descompunere de forma (1).

$n^2 - 1$ diferă de 100 fie cu un număr par de forma $2l$, fie cu un număr impar de forma $2l + 1$. În primul caz, înlocuind dreptunghiul de dimensiuni $(2, 9)$ cu dreptunghiul de dimensiuni $(2, 9 + l)$, iar celelalte lăsîndu-le neschimbate, se obține descompunerea cerută. În al doilea caz se înlocuiește dreptunghiul de dimensiuni $(2, 9)$ cu cel de dimensiuni $(2, 9 + (l - 1))$ și dreptunghiul de dimensiuni $(3, 8)$ cu cel de dimensiuni $(3, 9)$, celelalte dreptunghiuri nefiind supuse nici unei schimbări. Se obține astfel descompunerea cerută.

222. Fie

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y), \quad (1)$$

pentru orice valori reale x, y .

a) Se face în (1) înlocuirea $x = x_0$, astfel ca $f(x_0) \neq 0$. Un astfel de x_0 se găsește întotdeauna deoarece conform enunțului

$f(x) \neq 0$. Pentru $x = x_0$ și $y = 0$ se obține $f(x_0)f(0) = f(x_0)$, rezultând deci $f(0) = 1$.

b) Se înlocuiește în (1) $y = x$ și se obține $[f(x)]^2 = f(0)$.

c) Se înlocuiește în (1) $y = \frac{x}{2}$ și se obține $f(x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Deoarece $f\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ (conform punctului b), se deduce că $f(x) = 1$.

223. Propoziția din enunț este evidentă pentru $n = 1$. Se realizează pasul inductiv de la n la $n + 1$. Fie o mulțime formată din $n + 2$ numere pozitive care nu depășesc numărul $2n + 2$. Dacă numărul $2n + 2$ nu aparține mulțimii, submulțimea formată din numerele care nu depășesc pe $2n$ conține cel puțin $n + 1$ elemente și, conform ipotezei de la inducție, se găsește un element al său care se divide la altul, element care aparține și la mulțimea inițială. În cazul cînd numărul $2n + 2$ este element al acestei mulțimi, atunci fie numărul $n + 1$ aparține mulțimii și demonstrația se încheie, fie nu aparține. În acest din urmă caz, considerînd din nou submulțimea formată din numerele care nu depășesc $2n$ și adăugîndu-i acesteia numărul $n + 1$, se obține o nouă mulțime, formată cel puțin din $n + 1$ elemente în care se găsește conform ipotezei de la inducție un element care se divide cu un altul al aceleiași mulțimi. Dacă acest element nu este $n + 1$, înseamnă că aparține mulțimii inițiale și este deci cel căutat. Dacă acesta este $n + 1$, numărul $2n + 2$ care aparține mulțimii are proprietatea cerută.

În acest fel, elementul cerut poate fi totdeauna găsit.

224. Fie n numărul fețelor unui astfel de poliedru. Suma unghiurilor fiecărei fețe este egală cu 4π , iar suma tuturor acestor unghiuri este $4\pi n$. Pe de altă parte, numărul vîrfurilor poliedrului nu depășește $\frac{6n}{3} = 2n$, iar suma unghiurilor plane în unul din

vîrfuri este strict mai mică decît 2π . De aceea suma tuturor unghiurilor plane ale poliedrului trebuie să fie strict mai mică decît $4\pi n$, ceea ce constituie o contradicție.

225. Se verifică ușor că trei „duble“ (perechi de numere identice) nu pot aparține aceleiași submulțimi. Rezultă că o submulțime trebuie să conțină exact o „dublă“. O dublă se poate alege în cinci moduri, putîndu-i-se adăuga în lanț la ambele capete $\frac{4 \cdot 3}{2}$

perechi diferite. În lanț se poate deci construi cu o dublă 5·6 triplete diferite de forma (b, a) (a, a) (a, c) , unde a, b, c sînt numere diferite de la 1 la 5. Se observă cu ușurință că fiecare astfel de triplet poate fi completat formînd un lanț închis numai în două moduri.

Astfel, o submulțime conținînd o singură dublă se poate forma în $5 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ moduri. Se poate demonstra în continuare că formînd astfel submulțimea, celelalte două submulțimi ale descompunerii se determină unic. De aceea există 60 de asemenea descompuneri.

226. Latura pătratului înscris în cerc este $x' = \sqrt{2}r$.

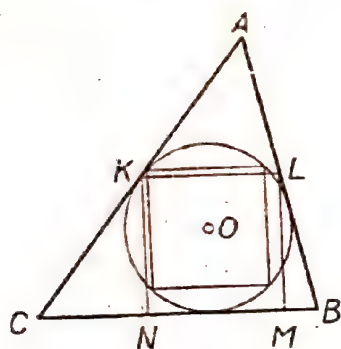


Fig. 95

Fie pătratul înscris în cerc (fig. 95) și avînd una din laturi paralelă cu BC . Pătratul înscris în triunghi are aria maximă dintre toate pătratele cuprinse în triunghi. Prin urmare, latura sa x este mai mare decît latura x' , adică $x > x' = \sqrt{2}r$.

Se înscrie în triunghiul dat un pătrat, iar în pătrat se înscrie un cerc. Acest cerc este situat în triunghi. De aceea raza sa $\frac{x}{2} < r$, (r

fiind raza cercului înscris în triunghi) deoarece cercul înscris în triunghi este cel mai mare dintre toate cercurile situate în întregime în interiorul triunghiului.

S-a arătat astfel că $r\sqrt{2} < x < 2r$.

227. Se construiește cercul (fig. 96) de rază maximă, care trece prin punctul A' și este tangent la laturile unghiului dat. Se notează prin B și C punctele de tangență ale cercului cu laturile unghiului. Distanța dintre extremitățile B și C este $2\sqrt{2} + 2$. Se va arăta că arcul $BA'C$ al cercului poate fi tras pe coridor. Se rotește cercul cu 45° în jurul centrului O . Punctul B este suprapus astfel peste punctul A' , punctul A' peste punctul C și punctul C peste punctul C' , adică arcul de cerc $BA'C$ se va suprapune peste arcul $A'CC'$. În continuare țeava va fi deplasată de-a lungul lui $A'C'$. Analog, rotind arcul $BA'C$ cu un unghi de 45° în sens opus, se obține arcul $B'BA'$, deci arcul $BA'C$ poate fi tras pe ambele părți ale coridorului trecînd prin colțul respectiv.

Se arată că nu poate fi trasă în aceste condiții o țeavă avînd distanța mai mare între extremități. Lățimea minimă a unei benzi prin care poate fi tras o curbă se va numi lățimea curbei. Se presupune că se poate trage pe coridor o țeavă avînd distanța

între extremități $FE > 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{2}$ (fig. 97). De aceea unghiul format de direcțiile segmentelor EF și $A'A$ este obtuz. În cealaltă porțiune de coridor unghiul analog va fi ascuțit. Rezultă că la traversarea colțului se găsește o poziție a țevii în care dreapta EF este perpendiculară pe AO (v. fig. 96). Fie punctul D' în care

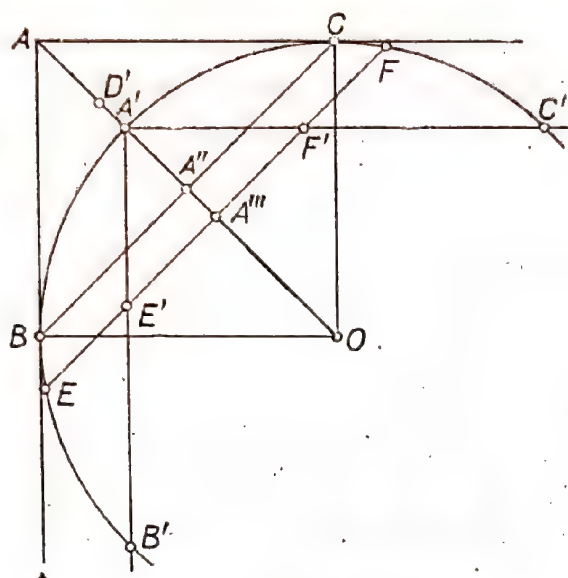


Fig. 96

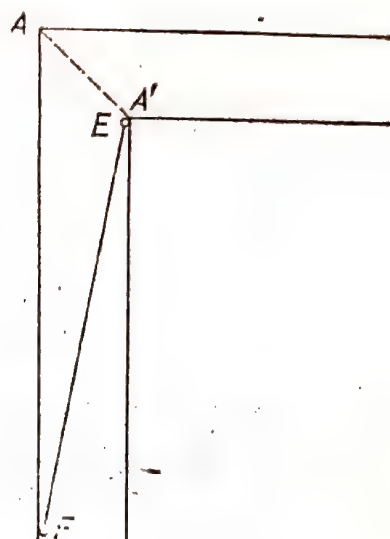


Fig. 97

țeava intersectează pe AO în această poziție. Se notează cu F' și E' punctele de intersecție ale lui FE cu unghiul interior. În acest caz $FF' \leq \sqrt{2}$ și $EE' \leq \sqrt{2}$ iar

$$F'E' = FE - FF' - E'F > 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2.$$

Pe baza convexității benzii, dacă toată figura este trasă în această bandă, este tras de asemenea orice triunghi avînd vîrfurile în puncte ale figurii. Se consideră în locul triunghiului $FD'E$ triunghiul $F'A'E$ situat în interiorul lui $FD'E$. Triunghiul $F'A'E$ este dreptunghic isoscel. Lățimea sa minimă este cea mai mică înălțime $A'A'' = \frac{E'F'}{2}$, adică depășește unitatea. Din această cauză triunghiul $F'A'E$ nu poate fi tras în această bandă și deci nu poate fi trasă nici întreaga țeavă.

Cea mai mare distanță între capetele țevii va fi deci $2 + 2\sqrt{2}$.

228. Se observă că $n^5 - n$ se divide la 5 pentru orice număr întreg n . Se presupune că $f(x)$ este produs a două polinoame cu coeficienți întregi. Se vor examina două cazuri:

C a z u l a).

$$x^5 - x + a = (a_0x + a_1)(b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4). \quad (1)$$

Identificînd coeficienții lui x^5 , se găsește $a_0b_0 = 1$, deducînd astfel că numerele întregi a_0 și b_0 sînt ± 1 . Se poate considera că $a_0 = b_0 = 1$.

Dacă se ia $x = -a_1$, se obține $-a_1^5 + a_1 + a = 0$ sau $a_1^5 - a_1 - a = 0$, ceea ce este imposibil, deoarece $a_1^5 - a_1$ este divizibil cu 5, iar numărul a nu este, prin enunț, divizibil cu 5.

C a z u l b).

$$x^5 - x + a = (x^2 - px + q)(x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3);$$

$$p, q, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 - px + q = 0$, ceea ce înseamnă că sînt rădăcini și pentru ecuația $x^5 - x + a = 0$, adică $x_1^5 - x_1 + a = 0$, $x_2^5 - x_2 + a = 0$. Adunînd membru cu membru aceste egalități, se găsește

$$x_1^5 + x_2^5 - (x_1 + x_2) + 2a = 0. \quad (3)$$

Fiindcă $x_1 + x_2 = p$, se obține

$$p^5 = (x_1 + x_2)^5 = x_1^5 + x_2^5 + 5x_1x_2(x_1^3 + x_2^3) + 10x_1^2x_2^2(x_1 + x_2). \quad (4)$$

Din (4) se obține că $p^5 - (x_1^5 + x_2^5)$ este număr întreg divizibil cu 5. Fie membrul întîi al egalității (3)

$$x_1^5 + x_2^5 - (x_1 + x_2) + 2a = x_1^5 + x_2^5 - p^5 + p^5 - p + 2a.$$

S-a arătat că $x_1^5 + x_2^5 - p^5$ și $p^5 - p$ se divid cu 5. În consecință $2a$ trebuie să fie divizibil cu 5, ceea ce contrazice enunțul. Deci $f(x) = x^5 - x + a$ nu poate fi descompus în factori cu coeficienți întregi.

229. a) Fie toate cifrele nenule. Se obține ecuația

$$\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{zxy} + \overline{zyx} + \overline{yax} + \overline{yzx} = 3\overline{xxx}$$

sau, altfel scris,

$$222x + 222y + 222z = 333y, \quad 222y + 222z = 111x, \quad 2(y + z) = z.$$

Rezultă astfel că x este număr par și, deoarece y și z sînt nenule și nu pot fi simultan egale cu 1, $y + z > 2$. Se obține $x > 4$, deci x poate fi 6 sau 8 :

$$x = 6, y + z = 3, y = 2, z = 1.$$

$$x = 8, y + z = 4, y = 3, z = 1.$$

Datorită simetriei condițiilor față de y și z , este indiferent care cifră se notează cu y și care se notează cu z .

b) x nu poate fi nul, nici y și z nu se pot anula simultan. Fie unul din acestea două nul, de exemplu y . Ecuația ia forma

$$\overline{x0z} + \overline{xz0} + \overline{zx0} + \overline{z0x} = 3\overline{xxx}$$

sau, altfel scris,

$$211x + 211z = 333x, \quad 211z = 122x.$$

Numerele 211 și 122 sînt relativ prime. De aceea nu există valori z și x care să satisfacă ecuația și să fie cuprinse între 0 și 9 inclusiv. Cazul este imposibil.

Răspuns: 1) $x = 6, y = 2, z = 1$.

2) $x = 6, y = 1, z = 2$.

3) $x = 8, y = 3, z = 1$.

4) $x = 8, y = 1, z = 3$.

230. Se trece 1 în partea stîngă a inegalității și se aduce la același numitor :

$$\frac{x(x+1) - 8(x^2-1) + 15(x-1) - 2x(x^2-1)}{2x(x-1)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{x^2 + x - 8x^2 + 8 + 15x^2 - 15x - 2x^3 + 2x}{2x(x-1)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{-2x^3 + 8x^2 - 12x + 8}{2x(x-1)(x+1)} \geq 0,$$

sau, altfel scris,

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}{x(x-1)(x+1)} \leq 0.$$

Numărătorul se descompune în factori

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x-2)(x^2 - 2x + 2).$$

Inegalitatea ia forma

$$\frac{(x-2)(x^2 - 2x + 2)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0. \quad (1)$$

Discriminantul trinomului $x^2 - 2x + 2$ este mai mic decât zero și în consecință, oricare ar fi valorile lui x , trinomialul va fi pozitiv. De aceea inegalitatea (1) este echivalentă cu

$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)} \leq 0, \quad x \neq 0, x \neq \pm 1. \quad (2)$$

Ambii membri ai inegalității (2) se înmulțesc cu numărul pozitiv $x^2(x-1)^2(x+1)^2$. Se obține

$$(x-2)x(x-1)(x+1) \leq 0. \quad (3)$$

Rădăcinile expresiei din membrul întâi al inegalității (3) sînt $-1, 0, 1, 2$, semnul acesteia fiind dat de următorul tabel:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
E	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Inegalitatea este astfel satisfăcută de $x \in (1, 2] \cup (-1, 0)$.

231. Expresia din partea stîngă a egalității se transcrie, avînd în vedere că $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, și aplicînd formulele

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \cos x = -\cos(\pi - x),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \\
 + \cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos(\alpha + \beta) \\
 + \beta)[\cos(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta] &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \\
 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \\
 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \frac{1}{2} (2 \cos^2 \alpha - 1 + 2 \cos^2 \beta - 1) = 1.
 \end{aligned}$$

Identitatea este astfel demonstrată.

232. Analiza construcției. Se vor construi toate triunghiurile ABC asemenea cu cel dat și care au un vîrf în punctul dat A iar celălalt vîrf B este situat pe o dreaptă dată (fig. 98). Se pune problema găsirii punctelor C . $\angle CAB = \alpha$ este constant și raportul $\frac{CA}{BA} = \frac{b}{c}$ este constant. De aceea mulțimea acestor vîrfuri se obține prin rotirea drepte date cu unghiul α și apoi îndepărtînd-o de A de $\frac{b}{c}$ ori. Dreapta a se transformă astfel în în dreapta a' .

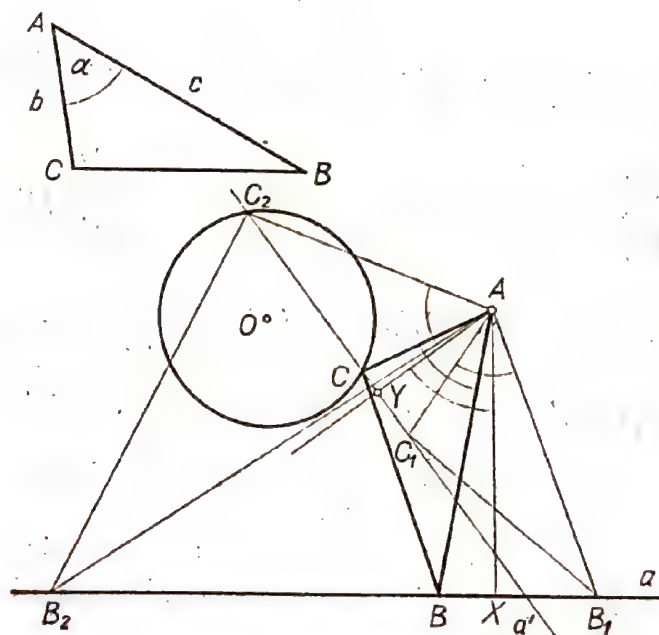


Fig. 98

Se vor găsi două rezolvări, una sau nici una, după cum numărul de puncte comune ale drepte a' cu cercul dat va fi două, unul sau nici unul. Rezultă astfel următoarea

Construcție. Prin punctul A se duce perpendiculara AX pe dreapta a (fig. 99). Se construiește $\angle XAY$ ($\angle XAY = \alpha$).

Pe dreapta AY se poartă segmentul AY ($AY = \frac{b}{c} AX$). Prin punctul Y se duce dreapta a' perpendiculară pe AY . Intersecția dreptei a' cu cercul dat va constitui punctul (sau punctele) C .

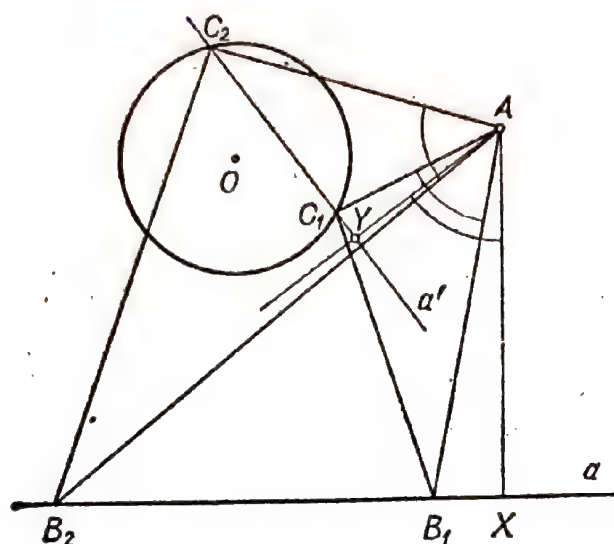


Fig. 99

233. a) AC este paralelă cu planul $A'B'C'D'$ și $AC \parallel SB$ (fig. 100). De aceea

$$\left. \begin{array}{l} D'C' \parallel AC \\ A'B' \parallel AC \end{array} \right\} D'C' \parallel A'B', \quad \left. \begin{array}{l} D'A \parallel SB \\ C'B' \parallel SB \end{array} \right\} D'A \parallel C'B',$$

iar $SB \perp AC$. Laturile paralelogramului $A'B'C'D'$ paralele cu SB și respectiv cu AC sînt perpendiculare, deci $A'B'C'D'$ este dreptunghi.

b) Fie o secțiune arbitrară $A'B'C'D'$, $A'B' = a' = ka$, $a = AC = SB = \dots$ În acest caz

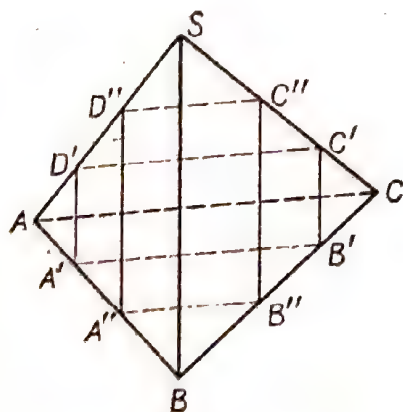


Fig. 100

$$\frac{SC'}{SC} = \frac{ka}{a}, \quad \frac{a}{B'C'} = \frac{SC}{CC'} = \frac{SC}{SC - SC'},$$

$$B'C' = b' = (1 - k)a,$$

$$P' = 2ka + 2(1 - k)a = 2a,$$

ceea ce arată că perimetrul secțiunii depinde numai de a .

234. Se notează prin K cercul de centru M și rază MA , circumscris triunghiului PAQ . Este evident că punctul B se află pe acest cerc. Se vor deosebi două cazuri: (1) punctul B se găsește pe arcul de cerc AQP , (2) punctul B se află în afara acestui arc.

C a z u l (1). Examinînd figura 101, se constată că $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ și că punctul B se află pe arcul AQ care constituie un sfert de cerc (în caz contrar dreapta CD nu ar trece prin punctul Q). Punctul C , evident, este situat în interiorul segmentului BP . Se notează cu S punctul de intersecție al segmentelor AQ și PB . Punctul C este picior al înălțimii QC în triunghiul dreptunghic PSQ , deci $\sphericalangle SQC = \sphericalangle SPQ$ și $\triangle AQD \sim \triangle QPC$. Mai mult, $\triangle AQD = \triangle QPC$, deoarece $AQ = QP = a$ și, prin urmare, $AD = QC = b$. Deoarece $ABCD$ este pătrat, se găsește că $b = DC = AD$. Trebuie deci ca $QC = DC$ și punctul C este, prin urmare, mijloc al segmentului QD iar S mijloc al segmentului AQ ($CS \parallel AD$, CS fiind linile mijlocie în $\triangle AQD$).

C o n s t r u c ție (v. fig. 101). Se construiește mijlocul S al segmentului AQ și se notează B punctul de intersecție al dreptei PS cu cercul K , diferit de P . Prin C se notează simetricul punctului B față de S . Triunghiul ABC ($\sphericalangle ABC = 90^\circ$) va forma împreună cu punctul D un paralelogram care, după cum se va demonstra, satisface condițiile din enunț.

D e m o n s t r a ție. Fiind simetrice față de punctul S , $\triangle SQC = \triangle SAB$ și în consecință, $\sphericalangle SCQ = 90^\circ$. De aceea, latura CD a paralelogramului $ABCD$ trece prin punctul Q , toate unghiurile acestui paralelogram fiind deci drepte.

Se găsește, în continuare, că $SA = SQ$, deci și $CD = CQ$. Deoarece $\triangle AQD = \triangle QPC$, înseamnă că $CQ = DA$. Se deduce astfel $CD = DA$ și din paralelogramul $ABCD$ toate laturile și toate unghiurile sînt egale între ele, deci acesta este un pătrat.

D i s c u ție. Punctul S se poate construi totdeauna, de aceea există un pătrat, cu vîrfurile B în interiorul arcului APQ .

Din $\triangle QSC$, în care $\sphericalangle QCS = 90^\circ$, $SC = \frac{1}{2}b$, $QC = AB = b$, rezultă, aplicînd teorema lui Pitagora, că $QS^2 = SC^2 + QC^2$ sau $\frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}b^2$, deci $b = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

caz contrar numărul a^m nu ar fi impar). Se studiază atunci două posibilități :

(α) Fie $m > 1$ număr natural par. Se ia $a = 2k + 1$, $m = 2p$, k și p fiind numere naturale. După înlocuirea în (1) se găsește

$$2^n - 1 = [(2k + 1)^2]^p \text{ sau } 2^n - 1 = [4(k^2 + k) + 1]^p. \quad (2)$$

În partea dreaptă se obține după ridicarea la putere un număr de forma $4Q + 1$, $Q \neq 0$ fiind un număr natural. Relația (1) se poate aduce astfel la forma

$$2^n = 4Q + 2. \quad (3)$$

Deoarece $n > 1$, numărul 2^n este multiplu de 4, în timp ce membrul al doilea al relației (3) nu este multiplu de 4. S-a ajuns în acest mod la o contradicție.

(β) Numărul m este impar. Relația (1) se poate scrie sub forma $2^n = a^m + 1$ ($m \geq 2$). Se aplică la membrul al doilea al lui (3) formula $x^b + y^b = (x + y) \cdot p$ ($p = x^{b-1} - x^{b-2}y + \dots - xy^{b-2} + y^{b-1}$), care este aplicabilă pentru toate numerele naturale impare $b \geq 3$, numărul termenilor polinomului p fiind b . Relația (1) ia atunci forma

$$2^n = (a + 1) \cdot A, \quad A = a^{m-1} - a^{m-2} + \dots - a + 1, \quad (4)$$

A fiind deci o sumă de un număr impar m de termeni impari și deci număr impar. Pentru numerele naturale $2 \leq k \leq m - 1$ se găsește $Z_k = a^k - a^{k-1} = a^{k-1}(a - 1) > 0$. Deoarece numărul A este sumă dintre cel puțin un număr Z_k și numărul 1, înseamnă că $A > 1$ și deci $A \geq 2$. Membrul întâi al relației (4) nu se divide însă la numărul impar $A \geq 3$, și s-a ajuns astfel din nou la o contradicție.

C o n c l u z i e. Singurul număr natural n care satisface condițiile problemei este numărul $n = 1$; în acest caz $2^n - 1 = 1$.

236. Pentru rezolvarea acestei probleme se aplică următoarele teoreme cunoscute :

T e o r e m a U. Fie dat $\angle CAB$. Se notează prin X orice punct din interiorul acestui unghi, iar x_1 , x_2 sînt distanțele de la acesta la dreptele AC , AB . Atunci mulțimea tuturor punctelor X care satisfac condiția $x_1 \geq x_2$ este formată din punctele situate în interiorul sau pe laturile unghiului BAK , semidreapta AK fiind bisectoarea unghiului dat BAC .

Teorema V. Fie segmentul AB avînd mediatoarea O_3 . Mulțimea tuturor punctelor X din plan, care satisfac relația $XA \geq XB$ (considerînd și distanțele nule), este semiplanul O_3B^* .

Teorema W. Dacă se dă unghiul BCM , iar semidreapta CK se află în interiorul acestuia, CK intersectează segmentul BM în interior (fig. 103).

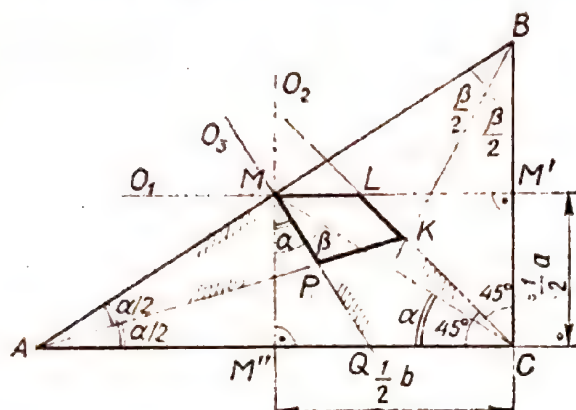


Fig. 103

Rezolvarea problemei se va realiza în două etape. În prima etapă va fi examinată mulțimea tuturor punctelor X ale triunghiului ABC care satisfac condiția $XA \geq XB \geq XC$, iar în cea de-a doua etapă se va rezolva efectiv problema.

I. Se notează prin d_1, d_2, d_3 mediatoarele laturilor a, b, c ale triunghiului ABC , prin M', M'' și M mijloacele acestor laturi, iar prin AK, BK, CK bisectoarele unghiurilor sale, K fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC (situat în interiorul acestuia). Conform enunțului

$$a < b, \quad (1)$$

și deci unghiurile ascuțite α, β ale triunghiului ABC satisfac inegalitățile

$$0 < \alpha < 45^\circ < \beta < 90^\circ. \quad (2)$$

Din teorema V rezultă că orice punct X al triunghiului ABC , care satisface condiția $XA > XB$, este situat în semiplanul O_3B ; orice punct X al triunghiului ABC , care satisface condiția $XB > XC$, este situat în semiplanul O_1C . Punctul X care satisface condițiile

$$XA \geq XB \geq XC \quad (3)$$

este situat simultan în interiorul unghiului drept BCA și în interiorul unghiului ascuțit QMM' , unde Q este punctul de intersecție al dreptelor AB și O_3 . Intersecția semiplanelor O_1C și O_3B este măr-

* Semiplanul determinat de dreapta O_1 și conținînd punctul Y se notează O_1Y .

ginită de unghiul QMM' . Înainte de a stabili ce figură descriu punctele X se fac următoarele constatări:

(1) $O_1 \parallel AC$, deoarece $AC \perp CB$, $O_1 \perp CB$;

(2) $MA = MB = MC$, deoarece M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Triunghiul MAC va fi, în consecință, isoscel iar O_2 va fi axa sa de simetrie, ceea ce atrage după sine că

$$\sphericalangle CMM'' = \sphericalangle AMM'' = \beta \quad (4)$$

(deoarece în triunghiul AMM'' , $\hat{A} = \alpha$, $\hat{M}'' = 90^\circ$, $\hat{M} = \beta$). $\sphericalangle QMM'' = \alpha$, deci $\sphericalangle XMM'' > \sphericalangle QMM''$ [v. (2)]. Semidreapta MQ este situată, prin urmare, în interiorul unghiului CMM'' , deci punctul Q se află în interiorul segmentului CM'' . Punctele X ale triunghiului ABC , care satisfac condițiile (3), umplu, prin urmare, trapezul $CQMM'$ a cărui bază mare este

$$MM' = \frac{1}{2} b. \quad (5)$$

II. Din teorema U rezultă:

— orice punct X al triunghiului ABC , pentru care $x_1 \geq x_2$, este situat în interiorul unghiului ascuțit ACK ; (6)

— orice punct X al triunghiului ABC , pentru care $x_2 \geq x_3$, este situat în interiorul unghiului ascuțit BAK . (7)

Se notează prin L punctul de intersecție al bisectoarei CK a unghiului BCA cu dreapta O_1 . Conform cu egalitățile (4) $\triangle MBC$ este isoscel și $\sphericalangle BCM = \sphericalangle CBM = \beta > 45^\circ$ [v. (2)] și, prin urmare, $\sphericalangle BCM > \sphericalangle BCK = 45^\circ$. Din această cauză semidreapta CL se află în interiorul unghiului BCM și conform teoremei W intersectează segmentul MM' în punctul L situat între punctele M și M' . Rezultă astfel că trapezul $CQML$ este o parte a trapezului $CQMM'$ [v. (5)] aflată în interiorul unghiului ACK [v. (6)]. (8)

Rămîne să se determine partea trapezului $CQML$ [v. (8)] care se găsește în interiorul unghiului BAK [v. (7)]. Semidreapta AK este situată în interiorul unghiului CAB (sau unghiului QAM) și conform teoremei W intersectează segmentul QM în punctul P aflat între punctele Q și M . Centrul K al cercului înscris în $\triangle ABC$ este situat, evident, în interiorul triunghiului ABC . Se va demonstra că acesta este situat în interiorul segmentului CL .

În $\triangle KBC$, $\hat{B} = \frac{1}{2} \beta$, $\hat{C} = 45^\circ$, însă $\frac{\beta}{2} < 45^\circ$ și, prin urmare,

$\hat{B} < \hat{C}$. În ΔKBC unghiului mai mare C i se opune latura mai mare, deci $KC < KB$ și conform teoremei V (aplicată în cazul inegalității) punctul K se află în semiplanul O_1C și deci, în mod necesar, în interiorul segmentului CL .

Punctul P se află, prin urmare, în interiorul segmentului QM , iar punctul K în interiorul segmentului CL . Din această cauză, partea trapezului $CQML$, mărginită de unghiul BAK , este patrulaterul $KPML$. În rezolvare au fost folosite teoremele U și V care descriu mulțimi de puncte avînd proprietățile date. Patrulaterul $KPML$ va fi deci mulțimea tuturor punctelor care satisfac cerințele problemei.

237. Vor fi folosite notațiile din fig. 104. Cu $t_1 = PT_1$ și $t_2 = PT_2$ se notează tangentele la cercul de rază r și centru S_1 , respectiv la cercul k_2 de rază r și centru S_2 în punctul lor comun P . Fie O mijlocul segmentelor PQ și S_1S_2 . Unghiurile $\varphi = \angle T_1PU$ și $\varphi' = \angle T_2PV$ sînt opuse la vîrf și adiacente cu unghiul $\omega = \angle T_1PT_2$. Se notează cu U punctul de intersecție al dreptei t_2 cu cercul k_1 ($U \neq P$) și

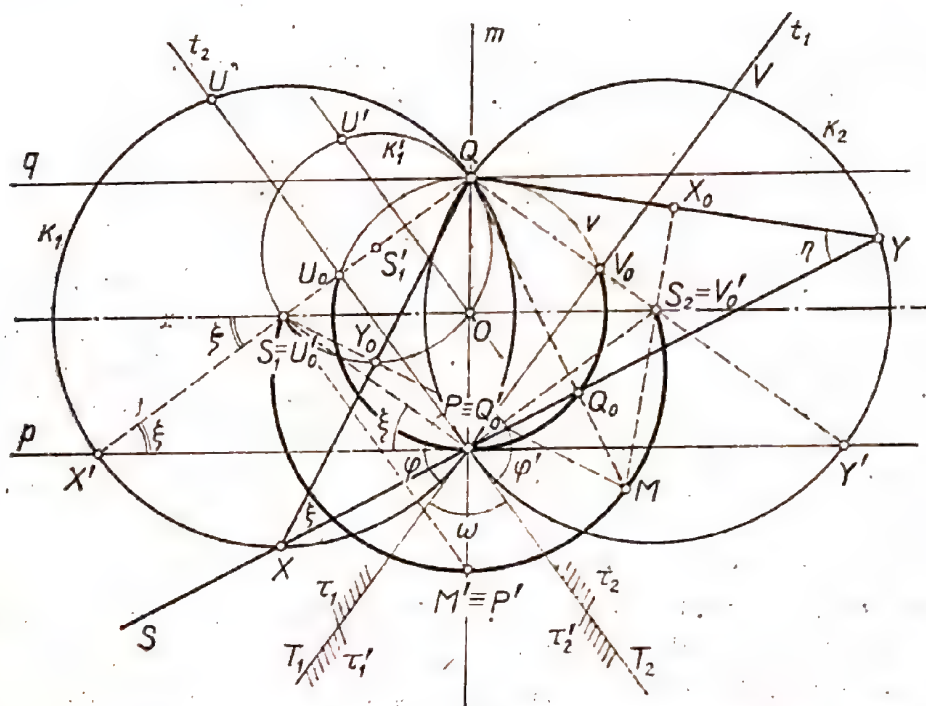


Fig. 104

analog punctul V este al doilea punct de intersecție al dreptei t_1 cu cercul k_2 .

Se va numi dreaptă de tipul s o dreaptă care are, în afară de punctul P , punctele X și Y comune cu cercurile k_1 , respectiv k_2 .

punctul P fiind situat între punctele X și Y . Este evident că orice dreaptă care trece prin punctul P și se află în interiorul unghiului $\varphi = \angle T_1PU = \angle T_2PV$, este dreaptă de tipul s ; toate celelalte drepte care trec prin punctul P nu sînt drepte de tipul s .

Se notează $\xi = \angle PXQ$, $\eta = \angle PYQ$. Se arată că $\xi = \eta$, în felul următor. Unghiul ξ este unghi cu vîrf pe cercul k_1 și se sprijină pe arcu PQ al acestui cerc, în mod analog unghiul η se sprijină pe arcu PQ al cercului k_2 . Cele două arce sînt egale din motive de simetrie și deci $\angle PS_1Q = \angle PS_2Q$, deci $\xi = \eta$. În consecință, $\triangle QXY$ este isoscel și are vîrfu Q . Se vede, în continuare, că toate triunghiurile QXY sînt asemenea între ele, avînd unghiurile de aceeași mărime (egală cu jumătate din arcu PQ). Acest fapt va fi folosit la punctul b) al problemei.

a) Se notează mijloacele laturilor XY , YQ și QX ale triunghiului QXY cu Q_0 , X_0 și Y_0 respectiv.

Teorema V_1 . Mulțimea punctelor Q_0 este formată din toate punctele interioare arcu U_0PV_0 ale cercului V de centru O și rază OP , O fiind mijlocul segmentelor S_1S_2 și PQ , iar punctele U_0 , V_0 sînt mijloacele segmentului PU , respectiv PV .

Demonstrație. Se consideră triunghiul dreptunghic PQQ_0 avînd ipotenuza PQ . Punctul Q_0 se găsește în acest caz pe cercul v de diametru PQ , fiind situat neapărat în interiorul arcu U_0PV_0 (U_0 și V_0 fiind mijloacele coardelor PU și PV), deoarece aceste puncte se află în unul din unghiurile φ' , φ . Dacă $Q_0 \neq P$ este un punct al acestui arc, dreapta PQ este o dreaptă de tipul s iar Q_0 este, evident, mijlocul respectivului segment XY .

Teorema V_2 . Mulțimea punctelor Y_0 este formată din toate punctele interioare arcu OS_1U' al cercului k'_1 , transformat al cercului k_1 prin omotetia de centru Q și raport $\frac{1}{2}$; U' este mijlocul segmentului QU . (O teoremă analoagă subsistă pentru punctele X_0 .)

Demonstrație. Punctul Y_0 este transformat al punctului X prin omotetia de centru Q și raport $\frac{1}{2}$. Punctele O și U' sînt transformate ale punctelor P și U prin această omotetie. Transformatele punctelor X ale arcu Q prin această omotetie se află pe arcu OS_1U' al cercului construit pe segmentul S_1Q ca diametru (punctul S_1 este transformatul punctului X' , diametral opus lui Q pe cercul

k_1). Reciproc, orice punct care se găsește în interiorul arcului de cerc OS_1U' este, evident, imagine a mijlocului Y_0 al unei laturi QX a unui triunghi de tipul QXY . Această demonstrație a teoremei V_2 rezolvă punctul a) al problemei.

b) S-a demonstrat deja, că oricare două triunghiuri QXY , $QX'Y'$, care îndeplinesc condițiile problemei, sînt asemenea. Se notează cu M și M' centrele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri. Acestea sînt situate pe semidreptele QQ_0 și respectiv QQ'_0 , Q_0 și Q'_0 fiind mijloacele bazelor XY și $X'Y'$. Are loc din această cauză egalitatea

$$\frac{QM}{QQ_0} = \frac{QM'}{QQ'_0} = \lambda, \quad (1)$$

λ fiind o constantă oarecare. Prin urmare, $QM = \lambda QQ_0$. Punctele M și M' sînt respectiv imaginile punctelor Q_0 , P , în omotetia de centru Q și raport λ . De aceea punctele M umplu interiorul arcului $U'_0M'V'_0$, care este transformatul prin omotetia de mai sus al arcului U_0PV_0 .

Reciproc, punctului M ales în interiorul arcului $U'_0M'V'_0$ îi corespunde prin omotetia inversă punctului Q_0 în interiorul arcului U_0PV_0 . Se știe deja că fiecărui astfel de punct Q_0 îi corespunde unic un triunghi QXY pentru care Q_0 este centru al cercului circumscris.

Mulțimea centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor OXY este mulțimea tuturor punctelor interioare unui anumit arc de cerc $S_1P'S_2$ pentru care secanta PQ este axă de simetrie ($S_1 \equiv U'_0$, $S_0 \equiv V'_0$).

Constanta λ poate fi exprimată cu ajutorul numerelor r și t , $2t$ fiind lungimea coardei comune PQ a celor două cercuri k_1 și k_2 . Se obține

$$\lambda = \frac{QU'_0}{QU_0}, \quad QU'_0 = QS_1 = r, \quad QU_0 = PQ \cdot \sin \xi = \frac{2t^2}{r}, \quad \text{deci } \lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

238. Funcția $y = y(x)$ este strict pozitivă, deoarece termenul $|1 + \sqrt{4 - x^2}|$ este un număr pozitiv, termenul $|1 - \sqrt{4 - x^2}|$ este număr nenegativ pentru orice x , pentru care $4 - x^2 \geq 0$ sau

$$-2 \leq x \leq 2. \quad (1)$$

Deoarece $y(x) = y(-x)$ pentru orice x satisfăcînd dubla inegalitate (1), graficul acestei funcții este simetric față de axa Oy .

Se consideră două posibilități.

C a z u l (a). Fie $1 - \sqrt{4 - x^2} \geq 0$ sau $1 \geq \sqrt{4 - x^2}$; prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai acestei inegalități se obține că aceasta are loc pentru următoarele valori ale lui x :

$$x \geq \sqrt{3} \text{ sau } x \leq -\sqrt{3}. \quad (2)$$

Astfel $|1 - \sqrt{4 - x^2}| = 1 - \sqrt{4 - x^2}$ și din modul de definire al lui y se obține că

$$y = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{4 - x^2} + 1 - \sqrt{4 - x^2}] = 1 \quad (3)$$

sau $y = 1$.

Ținând seama de relațiile (1), (2) și de rezultatul găsit (3), se deduce că graficul funcției $y(x)$ este dat pe intervalele $[-2, -\sqrt{3}]$ și $[\sqrt{3}, 2]$ de segmente ale dreptei de ecuație $y = 1$ (fig. 105).

C a z u l (b). Fie $1 - \sqrt{4 - x^2} \leq 0$ sau $1 \leq \sqrt{4 - x^2}$; prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai acestei inegalități se obține că aceasta este îndeplinită pentru valorile

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}. \quad (4)$$

În acest caz $|1 - \sqrt{4 - x^2}| = \sqrt{4 - x^2} - 1$, iar din definiția lui y se găsește

$$y = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - x^2} - 1) = \sqrt{4 - x^2}$$

sau $y = \sqrt{4 - x^2}$. Prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai acestei egalități se obține

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (5)$$

deci punctele respective ale graficului funcției $y = y(x)$ se află pe cercul de rază 2 având centrul în originea coordonatelor. În acest caz $y > 0$ și este vorba despre punctele cercului de ecua-

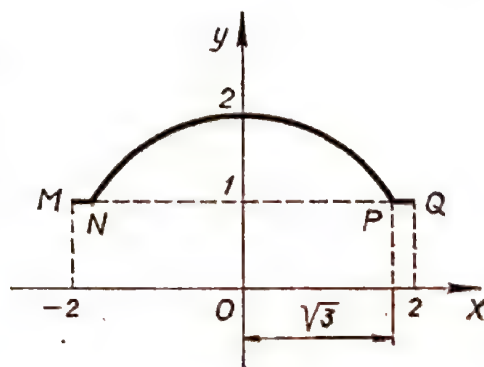


Fig. 105

ție (5) ale căror puncte au abscisa x satisfăcând condițiile (4). Pentru $x = \pm \sqrt{3}$ și $y > 0$ se obține din ecuația (5) că $y = 1$. În consecință, pe intervalul $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ graficul funcției (1) este un arc de cerc avînd centrul în originea sistemului de coordonate și raza 2, aflat deasupra axei Ox .

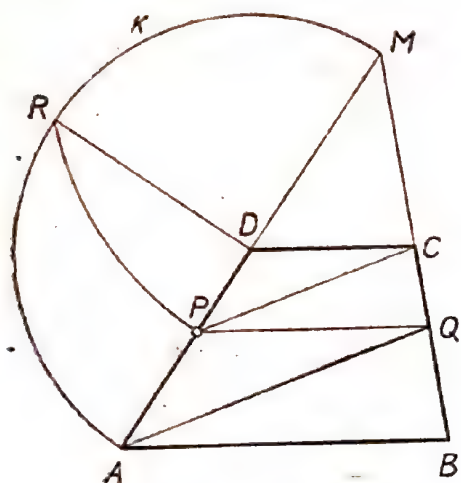


Fig. 106

239. Analiza construcției. Se notează cu M punctul de intersecție al dreptelor AD și BC . Se observă că omotetia de centru M care transformă punctul A în punctul P , transformă segmentul AB în segmentul PQ iar punctul B în punctul Q . Aceeași omotetie transformă segmentul AQ în segmentul PC (deoarece $PC \parallel AQ$), deci transformă punctul Q în punctul C . Rezultă astfel că segmentul QP se transformă în segmentul CD și, în consecință, punctul P se transformă în punctul D . Fie $x > 0$ raportul omotetiei, găsindu-se astfel că $MP = x \cdot MA$, $MD = x \cdot MP$. Prin îm-

părțirea membru cu membru a acestor două relații se ajunge la egalitatea

$$\frac{MP}{MD} = \frac{MA}{MP},$$

adică $MP^2 = MA \cdot MD$.

Rezultă astfel următoarea construcție. Pe segmentul MA ca diametru se construiește cercul k . Se construiește apoi perpendiculara în D pe dreapta MA și fie R punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu semicercul k . Rezultă din teorema catetei că $MR^2 = MA \cdot MD$ și deci $MP = MR$; punctul P fiind astfel construit. Din cele de mai sus rezultă că punctul P este cel căutat. Din analiza făcută rezultă că problema are rezolvare unică.

Pentru a determina lungimile segmentelor PA și BQ se notează $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Evident,

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (1)$$

$PA \cdot (x + 1) = d$, iar prin înlocuirea lui x din egalitatea (1) se găsește

$$\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + 1\right) \cdot PA = d,$$

adică $(\sqrt{c} + \sqrt{a}) PA = d\sqrt{a}$, deci $PA = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$. Se poate obține

în mod analog că $BQ = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$.

240. Se pune $\sin 1$ sub forma

$$\sin 1 = \sin[k - (k - 1)] = \sin k \cos(k - 1) - \cos k \sin(k - 1).$$

Cel de al k -lea termen se va scrie

$$\begin{aligned} \frac{\sin 1}{\cos(k-1) \cos k} &= \frac{\sin k \cos(k-1) - \cos k \sin(k-1)}{\cos(k-1) \cos k} = \\ &= \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1). \end{aligned} \quad (1)$$

Deoarece k este întreg, $k \neq \frac{\pi}{2} \cdot m$ oricare ar fi m întreg și deci $\cos k \neq 0$ oricare ar fi k întreg, egalitatea de mai sus fiind adevărată pentru orice valori întregi k . Aplicând în continuare relația (1) fiecărui termen, se obține

$$\begin{aligned} \frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cos 3} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos(n-1) \cos n} &= \\ = (\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0) + (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2) + \dots & \\ \dots + [\operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n-1)] = \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} n. \end{aligned}$$

241. Se notează $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$. Egalitățile date iau forma

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2. \quad (1)$$

Se va arăta că cele trei unghiuri din fiecare vîrf al tetraedrului sînt simultan ascuțite, drepte sau obtuze.

Fie, de exemplu, unghiurile din vârful A . Se notează (fig. 107)
 $\angle BAD = \varphi$, $\angle CAD = \psi$, $\angle BAC = \omega$.
 Din teorema cosinusului se obține

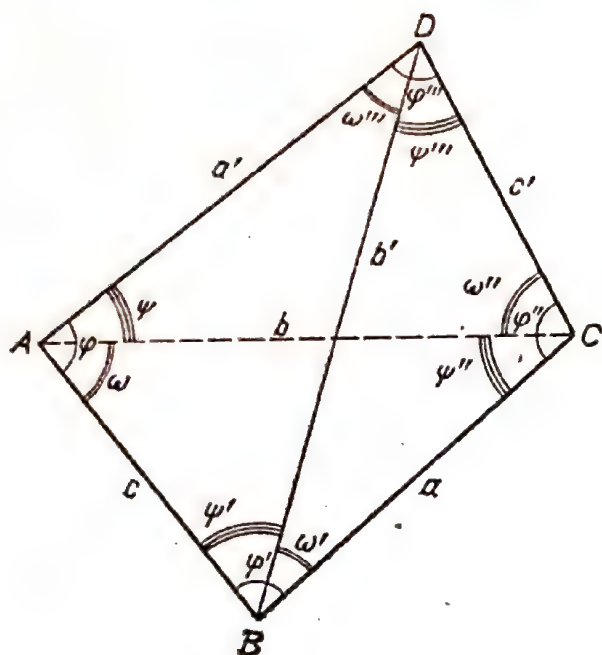


Fig. 107

$$2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2, \quad (2)$$

$$2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2, \quad (3)$$

$$2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2. \quad (4)$$

Folosind egalitățile (1), membrii din dreapta ai egalităților (2) și (3) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} a'^2 + c^2 - b'^2 &= (c^2 + c'^2 - a^2) + \\ &+ c^2 - (c^2 + c'^2 - b^2) = \\ &= c^2 + c'^2 - a^2 + c^2 - c'^2 - \\ &- c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2, \\ a'^2 + b^2 - c'^2 &= (b^2 + b'^2 - a^2) + \\ &+ b^2 - (b^2 + b'^2 - c^2) = \\ &= b^2 + b'^2 - a^2 + b^2 - b'^2 - \\ &- b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2. \end{aligned}$$

Membrii din dreapta ai egalităților (2) și (3) sînt egali cu membrul drept al egalității (4). Prin urmare, $2a'c \cos \varphi = 2a'b \cos \psi = 2bc \cos \omega$. Deoarece lungimile muchiilor tetraedrului sînt exprimate prin numere pozitive, $\cos \varphi$, $\cos \psi$, $\cos \omega$ sînt fie simultan pozitive, fie se anulează simultan, fie sînt negative. Deoarece A este un vîrf arbitrar al tetraedrului, toate trei unghiurile din fiecare vîrf al acestuia sînt simultan ascuțite, respectiv simultan drepte sau obtuze.

Nu se pot întîlni unghiuri drepte sau obtuze în mai mult de un vîrf al tetraedrului, deoarece în caz contrar s-ar găsi cel puțin o față a tetraedrului, adică un triunghi, care ar avea mai mult de un unghi drept sau obtuz, ceea ce nu este posibil. Dacă în toate vîrfurile tetraedrului unghiurile sînt ascuțite, afirmația din enunț este satisfăcută. Dacă într-unul din vîrfuri, de exemplu în A , unghiurile sînt drepte sau obtuze, toate unghiurile feței opuse acestui vîrf vor fi ascuțite. În cazul de față $\triangle BCD$ este ascuțit. Afirmația din enunț este, astfel, complet demonstrată.

242. Dacă (x_1, x_2, \dots, x_n) constituie o soluție a sistemului, nici unul din numerele x_i nu este egal cu zero.

În cazul $n = 2$, sistemul devine

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a_1, \\ x_2 x_1 = a_2. \end{cases}$$

Se deduce $\frac{x_1 x_2}{x_2 x_1} = \frac{a_1}{a_2}$ sau $1 = \frac{a_1}{a_2}$; $a_1 = a_2$. Pentru $a_1 = a_2$ sistemul este compatibil nedeterminat, iar dacă $a_1 \neq a_2$, sistemul este incompatibil.

În cazul $n = 3$, sistemul ia forma

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a_1, & (1) \\ x_2 x_3 = a_2, & (2) \\ x_3 x_1 = a_3. & (3) \end{cases}$$

Înmulțind relațiile (1) și (3) și împărțind apoi prin relația (2), se găsește

$$x_1^2 = \frac{a_1 a_3}{a_2}. \quad (4)$$

Deoarece $\frac{a_1 a_3}{a_2} > 0$, ecuația (4) are două rădăcini. Fiecărei valori a lui x_1 din ecuația întâi și a treia îi corespund valori ale lui x_2 și x_3 . Pentru $n = 3$ sistemul va avea deci totdeauna două soluții.

În continuare se studiază sistemul pentru n arbitrar.

C a z u l a. $n \geq 2$, n par. În acest caz

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{n-1} x_n) = (x_2 x_3)(x_4 x_5) \dots (x_n x_1). \quad (5)$$

Înlocuind valorile produselor luate din sistemul dat, se obține

$$a_1 a_3 \dots a_{n-1} = a_2 a_4 \dots a_n. \quad (6)$$

Condiția obținută este necesară pentru existența soluțiilor. Dacă este satisfăcută condiția (6), sistemul are o infinitate de soluții. Într-adevăr, pentru orice $x_1 \neq 0$ din primele $n - 1$ ecuații ale sistemului pot fi găsite succesiv valorile lui $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$. Trebuie

să se arate că x_1 și x_n satisfac și ultima ecuație a sistemului. Într-adevăr

$$x_n x_1 = \frac{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{n-1} x_n)}{(x_2 x_3)(x_4 x_5) \dots (x_{n-2} x_{n-1})} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{n-1}}{a_2 a_4 \dots a_{n-2}}, \quad (7)$$

și conform relației (6) membrul al doilea al egalității (7) este a_n , deci $x_n x_1 = a_n$. În acest caz, dacă este îndeplinită condiția (6), sistemul este compatibil nedeterminat.

C a z u l b. Fie n impar. Se obține

$$\frac{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_n x_1)}{(x_2 x_3)(x_4 x_5) \dots (x_{n-1} x_n)} = \frac{a_1 a_3 \dots a_n}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}} \quad (8)$$

sau

$$x_1^2 = \frac{a_1 a_3 \dots a_n}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}}. \quad (9)$$

Din această relație se găsesc două valori pentru x_1 . Pentru fiecare din acestea se găsesc succesiv din sistemul dat valorile celorlalte necunoscute. Se arată că valorile lui x_1 și x_n satisfac și ultima ecuație. Într-adevăr,

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{(x_1 x_2)(x_3 x_4) \dots (x_{n-2} x_{n-1})}{(x_2 x_3)(x_4 x_5) \dots (x_{n-1} x_n)} = \frac{a_1 a_3 \dots a_{n-2}}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}}.$$

Din egalitatea (9) se deduce

$$\frac{a_1 a_3 \dots a_{n-2}}{a_2 a_4 \dots a_{n-1}} = \frac{x_1^2}{a_n}.$$

În consecință, $\frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1^2}{a_n}$, deci $x_1 x_n = a_n$.

Astfel, când n este impar, sistemul are totdeauna două soluții. Pentru n par sistemul are o infinitate de soluții când $a_1 a_3 \dots a_{n-1} = a_2 a_4 \dots a_n$, iar dacă $a_1 a_3 \dots a_{n-1} \neq a_2 a_4 \dots a_n$, sistemul nu admite soluții.

243. Fără a restringe generalitatea raționamentelor, se poate presupune că

$$a \leq b \leq c. \quad (1)$$

$$\text{Dacă } a \geq 3, \quad ab + bc + ac \leq 3bc \leq abc. \quad (2)$$

Aceste relații devin egalități numai cînd $a = b = c = 3$. Inegalitatea (2) contrazice inegalitatea dată. Rezultă că $a < 3$, adică $a = 2$. În acest caz din inegalitatea

$$abc < ab + bc + ac, \quad (3)$$

se deduce că $2bc < 2b + bc + 2c$, adică $2b + 2c > bc$ sau $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$. Dacă $c \geq b \geq 5$, înseamnă că $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{5}$, $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{5}$ și $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, adică inegalitatea (3) nu este îndeplinită. Astfel, în cazul $a = 2$ trebuie fie ca $b = 2$, caz în care c poate fi orice număr prim, fie $b = 3$, caz în care fie $c = 3$, fie $c = 5$.

244. Baza piramidei este romb $ABCD$ (fig. 108). Se notează cu φ unghiul format de diagonala AC a rombului cu latura AB . Fiindcă $\varphi < 90^\circ$, $OD = OB = \sin \varphi$, iar $OA = OC = \cos \varphi$.

Fără a restrînge generalitatea, se poate nota $AS = x$. Triunghiul BSD este isoscel, iar $\triangle SDB = \triangle CDB$, ceea ce înseamnă că $SO = AO = \cos \varphi$. În planul ASC se constată că $AS = x$, $SC = 1$, $AO = OC = OS = \cos \varphi$, deci punctele A , S și C sînt situate pe un cerc avînd centrul în O și raza egală cu $\cos \varphi$. Unghiul ASC este drept fiindcă are vîrfurile pe cerc și se sprijină pe diametru. De aceea $SC^2 + AS^2 = AC^2$ sau $1 + x^2 = 4\cos^2 \varphi$, găsindu-se $x = \sqrt{4\cos^2 \varphi - 1}$. Înălțimea $h = SE$ a triunghiului ASC se găsește din formula care exprimă aria triunghiului ASC :

$$\frac{1}{2} SE \cdot AC = \frac{1}{2} SC \cdot AS \text{ sau } h \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{4\cos^2 \varphi - 1}.$$

Rezultă că $h = \sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2 \varphi}} SE$ este lungimea înălțimii piramidei $SABCD$ (demonstrația este propusă cititorului).

Aria rombului $ABCD$ va fi

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2\cos \varphi 2\sin \varphi = \\ &= \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

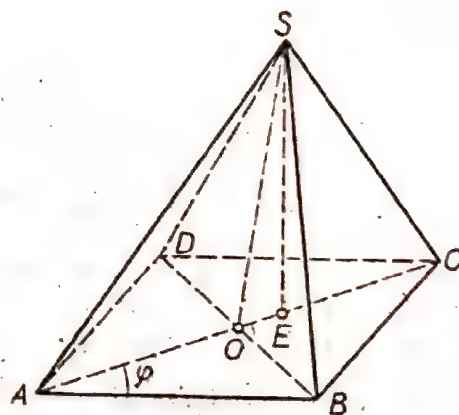


Fig. 108

ceea ce conduce la evaluarea volumul piramidei

$$V = \frac{1}{3} \sin 2\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cos^2 \varphi}}.$$

Din egalitatea $1 + x^2 = 4 \cos^2 \varphi$ se obține $2 \sin \varphi = \sqrt{3 - x^2}$, deci se poate exprima $\sin 2\varphi$ prin x astfel :

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{1 + x^2} \sqrt{3 - x^2},$$

ceea ce înseamnă că $V = \frac{x}{6} \sqrt{3 - x^2}$. Volumul V este maxim în

același timp cu V^2 și cu $36V^2 = x^2(3 - x^2)$. Făcându-se notația $36V^2 = y$ și $x^2 = t$, se constată că maximum funcției $y = t(3 - t) = -t^2 + 3t$ este realizat pentru $t = \frac{3}{2}$. În acest caz $V_{\max} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

245. 1. Se presupune că între mărimile α, β, γ ale unghiurilor triunghiului ABC are loc relația $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$. Se demonstrează că acesta este dreptunghic. Egalitatea se transcrie folosind formulele de transformare a sumei de cosinusuri în produs :

$$2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \cos 2 \gamma + 1 = 0,$$

$$2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + 2 \cos^2 \gamma = 0, \quad \gamma = \pi - (\alpha + \beta).$$

De aceea

$$\cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta).$$

$$2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + 2 \cos^2 (\alpha + \beta) = 0,$$

$$2 \cos (\alpha + \beta) [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)] = 0,$$

sau $4 \cos (\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta = 0$. Prin urmare, sau $\cos (\alpha + \beta) = 0$ și deci $\alpha + \beta = 90^\circ$ și $\gamma = 90^\circ$, sau $\cos \alpha = 0$, deci $\alpha = 90^\circ$, sau $\cos \beta = 0$ și $\beta = 90^\circ$, deci triunghiul este dreptunghic.

2. Fie triunghiul considerat dreptunghic. Se demonstrează că în acest caz suma cosinusurilor unghiurilor $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ este -1

Fie, de exemplu, $\alpha = 90^\circ$. Rezultă că

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma &= -1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \\ &= -1 + 2 \cos(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma) = -1,\end{aligned}$$

deoarece $\beta + \gamma = 90^\circ$ și $\cos(\beta + \gamma) = 0$.

246. $N = n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n+3) - (n+3) = (n^2-1)(n+3) = (n-1)(n+1)(n+3)$. Numărul N se scrie deci ca produs a trei numere pare consecutive. Se poate considera $n = 2k + 1$, k fiind un număr întreg nenegativ. Numărul N va avea forma $N = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$. Fiindcă n conține trei factori întregi consecutivi, cel puțin unul din aceștia este par, iar unul este multiplu de trei. Produsul se divide, evident, prin

$$8 \cdot 2 \cdot 3 = 48.$$

247. Semnul de inegalitate, deocamdată necunoscut, se notează cu \vee . Astfel,

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} \vee \sqrt{19} + \sqrt{3}. \quad (1)$$

Deoarece radicalii sînt pozitivi, ambii membri ai inegalității sînt pozitivi. Se poate ridica la pătrat atît membrul întii cît și cel de-al doilea fără a schimba sensul inegalității, obținîndu-se astfel $7 + 10 + 2\sqrt{70} \vee 19 + 3 + 2\sqrt{57}$, inegalitate echivalentă cu

$$2\sqrt{70} \vee 5 + 2\sqrt{57}. \quad (2)$$

Ridicînd ambii membri din nou la pătrat, sensul inegalității se păstrează, găsind că

$$280 \vee 25 + 228 + 20\sqrt{57} \text{ sau } 27 \vee 20\sqrt{57}.$$

O nouă ridicare la pătrat conduce la $729 \vee 22800$. Semnul \vee este deci $<$, raționamentele anterioare arătînd că

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{19} + \sqrt{3}.$$

248. Se notează numărul necunoscut, scris ATOM, cu litera x , x fiind un număr de patru cifre. Prin urmare,

$$1000 < x < 10\,000. \quad (1)$$

Condițiile problemei impun ca x să fie format din cifre diferite. Ultima cifră nu poate fi zero, deoarece în caz contrar ultimele două cifre ale rezultatului ar fi zerouri.

Rezultatul înmulțirii este x^2 . Pe de altă parte, dacă din acesta se scade numărul x , se obține un număr care se termină cu patru zerouri, adică $x^2 - x = n \cdot 10^4$, unde n este un număr natural. Egalitatea se poate transcrie sub forma $x(x - 1) = n \cdot 10^4$, deci x nu se poate termina cu zerouri și $x - 1$ nu poate fi multiplu de 10^4 , iar x și $x - 1$ sînt relativ prime, înseamnă că pot fi realizate două situații: sau x conține cel puțin patru factori 2 și $x - 1$ patru factori 5 (cazul 1), sau, invers, x conține cel puțin patru factori 5 și $x - 1$ patru factori 2 (cazul 2).

În continuare se examinează aceste cazuri.

a) $x = 16k$, $x - 1 = 625m$, adică $x = 625m + 1$ ($m < 16$). Înseamnă că $625m + 1 = 16k$ sau $39 \cdot 16m + m + 1 = 16k$. Egalitatea este posibilă cînd $m + 1 = 16$, adică $m = 15$. Rezultă $x = 9376$.

b) $x - 1 = 16k$, $x = 16k + 1$, $x = 625m$ ($m \leq 16$). În acest caz $625m = 16k + 1$ sau $625m - 1 = 16k$. Separînd în membrul întîi un termen multiplu de 16, se obține $39 \cdot 16m + m - 1 = 16k$. Cea mai mică valoare a lui m care satisface egalitatea este 17. În acest fel, cazul b) nu este posibil.

Răspuns: $9376 \cdot 9376$

$$\begin{array}{r} 84384 \\ 28128 \\ 65632 \\ 56256 \\ \hline 87909376 \end{array}$$

249. a) $p = 30q + r(1)$, p fiind numărul dat, q citul iar r restul la împărțirea lui p la 30, $0 < r < 30$. Se verifică ușor că toate numerele compuse mai mici decît 30 au divizori comuni cu 30. Din egalitatea (1) rezultă că dacă r este număr compus, acesta va avea divizori comuni cu 30, iar p trebuind să fie divizibil cu acești divizori comuni, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, r trebuie să fie număr prim.

b) Afirmația nu este adevărată pentru 60. Există un număr compus mîi mic decît 60 care să nu aibă divizori comuni cu 60: numărul 49.

Exemplu: $p = 109$, $109 = 60 \cdot 1 + 49$.

250. Se introduc următoarele notații pentru numitori:

$$b^2 + c^2 = x, \quad c^2 + a^2 = y, \quad a^2 + b^2 = z,$$

(evident, $x > 0, y > 0, z > 0$) și se exprimă relația în x, y, z :

$$a^2 = \frac{y + z - x}{2}, \quad b^2 = \frac{x + z - y}{2}, \quad c^2 = \frac{x + y - z}{2}.$$

$$\frac{y + z - x}{2x} + \frac{x + z - y}{2y} + \frac{x + y - z}{2z} \geq \frac{3}{2}.$$

Inegalitatea se transformă succesiv:

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3,$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6.$$

Ultima inegalitate este însă o consecință a cunoscutei inegalități adevărate pentru orice $\alpha > 0, \beta > 0$: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$.

251. Fie $ABCD$ tetraedrul dat (fig. 109), ale cărui fețe sînt echivalente. Se va demonstra că acestea sînt egale.

Prin AB se duce planul α paralel cu CD . Fie C' și D' proiecțiile punctelor C și D pe planul α , iar E punctul de intersecție al segmentelor AB și $C'D'$.

Prin punctele C' și D' se duc perpendicularele pe segmentul AB , picioarele cărora se notează cu M și N . Conform teoremei celor trei perpendiculare segmentele CM și DN sînt perpendiculare pe AB și vor fi, în consecință, înălțimi în triunghiurile ABC , respectiv ABD . Deoarece, prin enunț, ariile acestor două triunghiuri sînt egale, iar latura AB este comună, $CM = DN$. Din triunghiurile dreptunghice $CC'M$ și $DD'N$ în care $CM = DN$ și $CC' = DD'$ rezultă că $C'M = D'N$, obținînd astfel că triunghiurile dreptunghice MEC' și NED' sînt egale (avînd egale cîte un unghi ascuțit și cîte o catetă). Înseamnă că E este mijlocul segmentului $C'D'$.

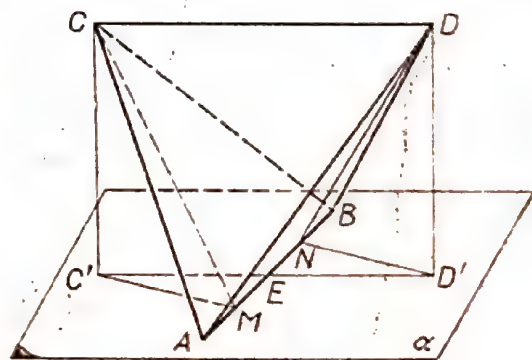


Fig. 109

Fiindcă muchiile AB și CD intervin simetric în raționamentele făcute, proiecția laturii AB pe planul care trece prin CD și este paralel cu AB , deci cu planul α , va înjumătăți segmentul CD . Proiecția lui CD pe planul α va înjumătăți deci segmentul AB , adică $AE = EB$. Deoarece $C'E = ED'$, înseamnă că $AC'BD'$ este paralelogram, adică $AC' = BD'$ și $AD' = C'B$. De aceea $AC = BD$ și $CB = AD$.

Repetând aceleași raționamente pentru altă pereche de muchii (diferite de AB și CD), se obține că $AB = CD$, ceea ce înseamnă că toate fețele tetraedrului sînt triunghiuri egale între ele.

Fie sfera circumscrisă tetraedrului. Prin fiecare față a tetraedrului se duce planul care o conține. Intersecția sferei cu fiecare din aceste plane este cercul circumscris respectivei fețe a tetraedrului. Din egalitatea triunghiurilor care constituie fețele tetraedrului rezultă egalitatea cercurilor circumscrise acestora. Deoarece toate aceste secțiuni egale ale sferei sînt egal depărtate de centru, rezultă că acesta va constitui și centrul sferei înscrise în tetraedru.

252. Pentru orice valori reale ale lui x au loc egalitățile :

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x) - \\ &- 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - \\ &- 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.\end{aligned}$$

De aceea ecuația dată este echivalentă cu ecuația $1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = a(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)$ sau $(2a - 3)\sin^2 x \cos^2 x = a - 1$. Deoarece $2a - 3 = 0$ (în caz contrar s-ar obține $a=1$, ceea ce nu se poate), înseamnă că $\sin^2 2x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$. Ecuația dată va avea astfel cel puțin o soluție cînd

$$0 \leq \frac{4(a-1)}{2a-3} \leq 1. \quad (1)$$

Dacă $2a - 3 > 0$, adică $a > \frac{3}{2}$, se găsește $0 \leq 4a - 4 \leq 2a - 3$, deci $2a \leq 1$, $a \leq \frac{1}{2}$ și $a > 1$, ceea ce este imposibil. Dacă $a \leq 1$ și

$2a - 3 < 0$, adică $a < \frac{3}{2}$, se găsește $0 \geq 4a - 4 \geq 2a - 3$, $a \geq \frac{1}{2}$, adică

$$\begin{cases} a \leq 1, \\ a \geq \frac{1}{2}, \\ a < \frac{3}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Se deduce astfel că

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1. \quad (3)$$

Reciproc, dacă este îndeplinită dubla inegalitate (3), rezultă inegalitățile (2), din care se deduce (1).

Astfel, ecuația dată are cel puțin o rădăcină reală dacă și numai dacă a satisface condiția $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Dacă $a = \frac{5}{6}$, se obține că

$$\sin^2 2x = \frac{4\left(\frac{5}{6} - 1\right)}{2 \cdot \frac{5}{6} - 3} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{5}{3} - 3} = \frac{1}{2}, \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \pm \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

253. a) Fie $u \in M, v \in M$. Deoarece $c > 0$ și $u \geq 0, v \geq 0$, înseamnă că $w = u \circ v = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c}} \geq 0$. Fiindcă $u < c, v < c$, rezultă că

$$(c - u)(c - v) > 0, \quad cu + cv < c^2 + uv, \quad c(u + v) < c^2 \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right)$$

și, prin urmare, $\frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} < c$.

Astfel, $u \circ v \in M$. Se obține, oricare ar fi $u, v, w \in M$,

$$\begin{aligned} (u \circ v) \circ w &= \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \circ w = \frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} \circ w = \frac{\frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} + w}{1+\frac{\frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} \cdot w}{c^2}} = \\ &= \frac{c^2(u+v) + (c^2+uv)w}{c^2+uv+(u+v)w} = \frac{c^2(u+v+w) + uvw}{c^2+uv+u+vw}, \\ u \circ (v \circ w) &= u \circ \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} = u \circ \frac{c^2(v+w)}{c^2+vw} = \frac{u + \frac{c^2(v+w)}{c^2+vw}}{1+\frac{u \cdot \frac{c^2(v+w)}{c^2+vw}}{c^2}} = \\ &= \frac{u(c^2+vw) + c^2(v+w)}{c^2+vw+u(v+w)} = \frac{c^2(u+v+w) + uvw}{c^2+vw+uv+uw}, \end{aligned}$$

adică $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$, ceea ce arată că mulțimea M este semigrup.

b) Relația $u \circ v_1 = u \circ v_2$ fiind adevărată pentru toate elementele din M , rezultă că

$$\frac{u+v_1}{1+\frac{uv_1}{c^2}} = \frac{u+v_2}{1+\frac{uv_2}{c^2}}, \quad (u+v_1)(c^2+uv_2) = (u+v_2)(c^2+uv_1),$$

$$uc^2 + v_1c^2 + u^2v_2 + uv_1v_2 = uc^2 + v_2c^2 + u^2v_1 + uv_1v_2,$$

$$v_1c^2 + u^2v_2 = v_2c^2 + u^2v_1.$$

Se obține astfel că $v_1(c^2 - u^2) = v_2(c^2 - u^2)$. Deoarece $u < c$, $c^2 - u^2 \neq 0$ și, prin urmare, $v_1 = v_2$. Se demonstrează analog că relația $u_1 \circ v = u_2 \circ v$ implică $u_1 = u_2$. Semigrupul M este deci regulat.

254. Se notează $W_2W_3 = S_1$, $W_3W_1 = S_2$, $W_1W_2 = S_3$, $BW_1 = Z_1$, $BW_2 = Z_2$, $BW_3 = Z_3$, $\sphericalangle W_3W_1W_2 = \varphi_1$, $\sphericalangle W_1W_2W_3 = \varphi_2$, $\sphericalangle W_2W_3W_1 = \varphi_3$ (fig. 110). Conform enunțului problemei, punctul B este centrul cercului înscris în $\Delta W_1W_2W_3$. De aceea W_1B , W_2B , W_3B sînt bisectoarele triunghiului $W_1W_2W_3$. Deoarece $S_1 < S_2 < S_3$, rezultă că $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ și deci

$$\frac{1}{2} \varphi_1 < \frac{1}{2} \varphi_2 < \frac{1}{2} \varphi_3. \quad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice BB_2W_1 , BB_3W_2 , BB_1W_3 , în care $BB_2 = BB_3 = BB_1 = r$, se deduce că

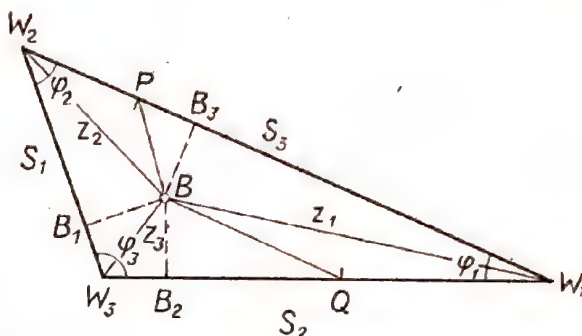


Fig. 110

$$Z_1 = \frac{r}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}, \quad Z_2 = \frac{r}{\sin \frac{\varphi_2}{2}}, \quad Z_3 = \frac{r}{\sin \frac{\varphi_3}{2}}. \quad (2)$$

Pe baza relațiilor (1) și (2) se obține $Z_1 > Z_2 > Z_3$.

Există șase itinerarii. Fie r_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) lungimea acestora.

$$\begin{aligned} \text{Astfel } r_1 &= Z_1 + S_3 + S_1 + Z_3, & r_4 &= Z_2 + S_1 + S_2 + Z_1, \\ r_2 &= Z_1 + S_2 + S_1 + Z_2, & r_5 &= Z_3 + S_2 + S_3 + Z_2, \\ r_3 &= Z_2 + S_3 + S_2 + Z_3, & r_6 &= Z_3 + S_1 + S_3 + Z_1. \end{aligned}$$

Deoarece $r_1 = r_6$, $r_2 = r_4$, $r_3 = r_5$, este suficient să se compare itinerariile r_1 , r_2 , r_3 . Se compară mai întîi r_1 cu r_2 . Se poartă în acest scop pe W_1W_2 segmentul $W_1P = W_1W_3$; $\Delta W_1PB = \Delta W_1W_3B$. În consecință, $W_3B = PB = Z_3$, $PW_2 = S_3 - S_2$. Din ΔW_2PB se deduce că $W_2B - PB < W_2P$, adică $Z_2 - Z_3 < S_3 - S_2$ sau $S_2 + Z_2 < S_3 + Z_3$, ceea ce înseamnă că $r_2 < r_1$. Se compară, în continuare, r_2 cu r_3 . Se poartă în acest scop pe W_1W_3 segmentul $W_3Q = W_3W_2$; $\Delta W_3QB = \Delta W_3W_2B$ și, prin urmare, $QB = W_2B = Z_2$, $QW_1 = S_2 - S_1$. Din ΔQW_1B se obține că $BW_1 - BQ < QW_1$, adică $Z_1 - Z_2 < S_2 - S_1$ sau $Z_1 + S_1 < Z_2 + S_2$, deci $r_2 < r_3$.

Astfel $r_2 < r_1$ și $r_2 < r_3$. Există, prin urmare, două drumuri minime, anume $BW_1W_3W_2B$ și $BW_2W_3W_1B$. Problema are rezolvare unică, abstracție făcînd de sensul itinerariului.

255. a) Deoarece $0 < \frac{b^2}{4a^2}$,

$$0 < a^2 + b < a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2} = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2. \quad (1)$$

Deoarece $a + \frac{b}{2a} > 0$, din (1) rezultă $\sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$. Aceasta

înseamnă că $\delta > 0$. În continuare $\sqrt{a^2 + b} + \delta = a + \frac{b}{2a}$, deci

$$\begin{aligned} a^2 + b + 2\delta\sqrt{a^2 + b} + \delta^2 &= a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2} \text{ sau } 2\delta\sqrt{a^2 + b} + \delta^2 = \\ &= \frac{b^2}{4a^2}, \text{ adică } 2a\delta < 2\delta\sqrt{a^2 + b} < \frac{b^2}{4a^2}, \text{ în consecință } 2a\delta < \frac{b^2}{4a^2} \text{ și} \\ \delta &< \frac{b^2}{8a^3}. \end{aligned}$$

b) Deoarece $\frac{b^3}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6} > 0$,

$$0 < a^3 + b < a^3 + b + \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6} = \left(a + \frac{b}{3a^2}\right)^3 \sqrt[3]{a^3 + b} < a + \frac{b}{3a^2}.$$

Aceasta înseamnă că $\sqrt[3]{a^3 + b} + \delta = a + \frac{b}{3a^2}$, $\delta > 0$. Ridicînd ambii membri ai egalității la cub și efectuînd reducerile, se găsește

$$3(\sqrt[3]{a^3 + b})^2\delta + 3\sqrt[3]{a^3 + b}\delta^2 + \delta^3 = \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6}.$$

Prin neglijarea unor termeni pozitivi se obține dubla inegalitate

$$3a^2\delta < 3(\sqrt[3]{a^3 + b})\delta < \frac{b^2}{3a^2} + \frac{b^3}{27a^6}$$

$$\text{și deci } \delta < \frac{b^2}{9a^5} + \frac{b^3}{81a^8} = \frac{b^2(9a^3 + b)}{81a^8}.$$

Dacă a și b sînt numere întregi și $a^3 < a^3 + b < (a+1)^3$, se găsește că $0 < b < 3a^2 + 3a + 1$ și fiindcă $a > 1$, $b < 3a^3 + 3a^2 + a^3 = 7a^3$, adică $\delta < \frac{16}{81} \cdot \frac{b^2}{a^5}$.

c) $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{49 + 7} \approx 7 + \frac{7}{14} = 7,5$ cu eroarea $0 < \delta < \frac{7^2}{8 \cdot 7^3} = \frac{1}{56} < 0,0179$ (din tabele se obține $\delta < 0,0167$).

$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64 + 16} \approx 4 + \frac{16}{3 \cdot 4^2} \approx 4,333$. Pentru eroarea δ se obține $0 < \delta < \frac{16 \cdot 16^2}{81 \cdot 4^3} = \frac{4}{81} \approx 0,04905$ (din tabele se obține $\delta \approx 0,024$).

256. În jurul unui punct P al sferei se descrie un cerc k aparținînd acesteia. Pe cercul k se ia punctul Q și punctele A, B , astfel ca $AB < PQ$. Din punctele A și B ca centre se descriu arce de rază AB (fig. 111). Fie C și D punctele de intersecție ale acestor arce.

Dacă M este centrul sferei, $AM = BM$, iar prin construcție $AC = BC$ și $AD = BD$. Pe de altă parte, $AP = BP$ fiind egale cu raza PQ .

M, P, C, D sînt, prin urmare, puncte ale unui plan perpendicular pe segmentul AB și trecînd prin mijlocul acestuia (planul mediator al lui AB). Deoarece acest plan trece prin centrul M al sferei, va conține un cerc mare a cărui rază este egală cu raza sferei.

Se va construi acest cerc. În acest scop se va construi pe o foaie de hîrtie un triunghi avînd laturile egale cu segmentele PC, CD și PD . Raza cercului care se circumscrie triunghiului PCD este raza sferei date.

257. a) Centrul S al sferei circumscrise tetraedrului $OABC$ (fig. 112) se află pe perpendiculara pe planul OAB , care trece prin mijlocul D al ipotenuzei AB a triunghiului dreptunghic OAB , și pe perpendiculara pe planul OCA , care trece prin mijlocul E al ipotenuzei AC a triunghiului dreptunghic OAC . De aceea $SD \parallel CO$ și $SE \parallel OB$. Prin urmare, se poate duce cîte un plan prin punctele

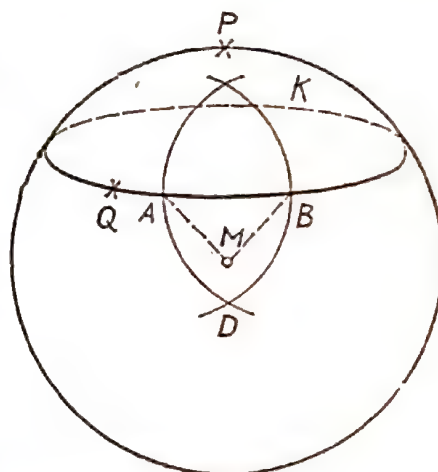


Fig. 111

S, D, O, C și prin punctele S, E, O, B . Aceste plane vor intersecta $\triangle ABC$ după medianele CD și respectiv BE , adică dreapta OS trece prin punctul T , centrul de greutate al triunghiului ABC .

b) Aplicând teorema sinusurilor triunghiului ABC , se obține

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

sau

$$\frac{BC^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{AC^2}{\sin^2 \beta} = \frac{AB^2}{\sin^2 \gamma} = k,$$

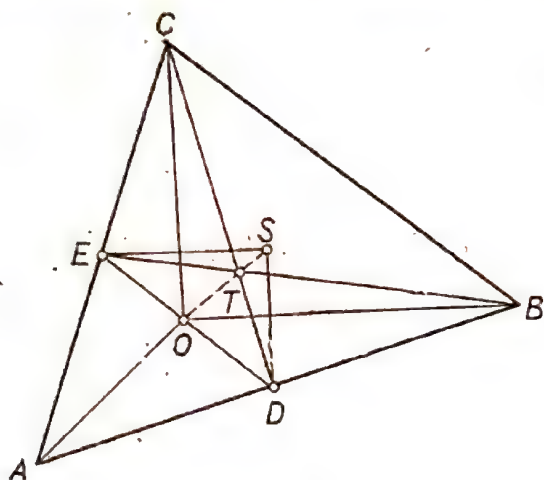


Fig. 112

iar din triunghiurile dreptunghice OBC, OAC și OAB se deduc relațiile

$$BC^2 = b^2 + c^2, \quad AC^2 = a^2 + c^2, \quad AB^2 = a^2 + b^2.$$

Astfel

$$\frac{b^2 + c^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{a^2 + c^2}{\sin^2 \beta} = \frac{a^2 + b^2}{\sin^2 \gamma} = k,$$

ceea ce implică, folosind proporții derivate, se obține

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2} &= \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} = \frac{\sin(\beta - \alpha) + \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta}. \end{aligned}$$

În mod analog se obțin celelalte două rapoarte deci, a^2, b^2, c^2 sînt proporționale cu $\operatorname{ctg} \alpha, \operatorname{ctg} \beta$ și $\operatorname{ctg} \gamma$.

258. Fie R raza sferei. În acest caz

$$a(1 + \sqrt{3}) = R + \sqrt{R^2 - (a/\sqrt{2})^2}, \text{ deci } R = a\sqrt{3} \text{ (fig. 113).}$$

Fie K, L, M, N punctele de intersecție ale muchiilor laterale cu sfera. Triunghiul KOA este isoscel, $OE \perp AA_1$, $AE = \frac{1}{2} KA = OO_1 =$

$= \sqrt{R^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$. Prin urmare, $KA = LB = MC = ND = 2a$. Figura curbilinie $ABLK$ poate fi descompusă în pătratul $ABLK$ și segmentul circular KL a cărui rază este $a\sqrt{2}$. Aria celor patru segmente de cerc este egală cu aria a patru sectoare egale cu un sfert de cerc, din care se scade aria pătratelor corespunzătoare, adică aria căută-
tă este

$$S = 4(2a)^2 + [\pi(a\sqrt{2})^2 - (2a)^2] = 2a^2(6 + \pi).$$

259. Se știe că mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de extremitățile A și B ale segmentului. Cele două semiplane determinate de această mediatoare se notează cu π_L^A și π_L^B . Semiplanul π_L^A în care se află punctul A este mulțimea tuturor punctelor din plan care nu sînt mai îndepărtate de punctul A decît punctul B . Mediatoarea aparține acestui semiplan.

Se va descrie, în continuare, cum înțeleptul, pășind de-a lungul unei drepte date, poate alege o bandă de lățime 1 m, perpendiculară pe această dreaptă, în care se găsește obiectul. Se presupune că el a făcut primul pas de-a lungul drepte.

1. Dacă i se spune „apropie-te”, el continuă să pășească în aceeași direcție pînă cînd, la cel de al $i + 1$ -lea pas i se spune „nu te apropia”. În acel moment el face un pas înapoi în punctul* A_i . Aceasta înseamnă că obiectul se găsește în banda formată de intersecția semiplanului $\pi_{L_i}^{A_i}$ cu semiplanul $\pi_{L_{i+1}}^{A_{i+1}}$. Lățimea acesteia este 1 m.

2. Dacă i se dă indicația „nu te apropia”, el se întoarce, pășind în direcția opusă, din nou pînă la momentul cînd i se spune „nu te apropia”. Procedează apoi ca în cazul 1.

Algoritmul acțiunii înțeleptului va fi descris complet în continuare.

* A_i este poziția înțeleptului după al i -lea pas, iar L_i este mijlocul segmentului $A_{i-1}A_i$.

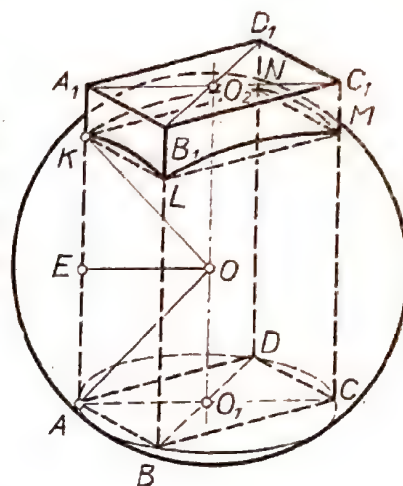


Fig. 113

De fiecare dată cînd face un pas, incluzînd și momentul inițial, înțeleptul privește în jur. În momentul în care vede obiectul, desfășurarea algoritmului se intrerupe.

În momentul inițial înțeleptul alege o dreaptă arbitrară și determină ca mai sus o bandă perpendiculară pe aceasta, în care se găsește obiectul.

Astfel, înțeleptul ajunge în banda de lățime 1 m, găsindu-se în punctul A_i în mijlocul acesteia. În acest punct el își schimbă direcția de mers cu 90° și, repetînd același algoritm pentru dreapta perpendiculară pe cea inițială, găsește obiectul. Fiîndcă obiectul se află în pătratul cu latura de 1 m, format de intersecția a două benzi perpendiculare cu lățimea de 1 m, ultimul pas îl aduce pe înțelept în punctul A_{i+j} , centrul pătratului indicat, din care obiectul poate fi văzut, deoarece distanța de la punctul A_{i+j} pînă la orice punct al pătra-

tului nu depășește $\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci este mai mică decît unu. Se observă că, ajungînd în punctul A_{i+j} , înțeleptul nu trebuie să mai facă încă doi pași, unul pînă în punctul A_{i+j+1} , unde i s-ar spune să nu se apropie, iar celălalt înapoi. Se calculează în continuare numărul de pași necesari pentru a găsi obiectul.

Fie k pași distanța după care se face schimbarea direcției și l pași restul pînă la găsirea obiectului. Astfel înțeleptul nu face mai mult de $k + l + 6$ pași. Dacă φ este unghiul între direcția inițială de deplasare și direcția spre obiect, la începutul acțiunii,

$$d|\cos \varphi| \geq k - \frac{1}{2}, \quad d|\sin \varphi| \geq l - \frac{1}{2}.$$

Adunînd aceste inegalități, se găsește

$$d(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|) \geq k + l - 1,$$

însă

$$d(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|) \leq d\sqrt{2}.$$

Rezultă că numărul de pași satisface inegalitățile

$$n \leq k + l + 6 = (k + l - 1) + 7 \leq d\sqrt{2} + 7 < \frac{3}{2}d + 7.$$

260. Se notează $AB = d$, $BN = x$, $NG = z$, $OM = R$ (fig. 114). Se duce perpendiculara OC din O pe AB și se notează $BC = b$, $CO = h$. Presupunind problema rezolvată, se deduce că

$$\begin{cases} x^2 + dx = z^2 + 2Rz, \\ (x - b)^2 + h^2 = (R + z)^2, \end{cases}$$

deci

$$(x - b)^2 + h^2 = R^2 + x^2 + dx.$$

Rezolvând această ecuație, se obține $x = \frac{b^2 + h^2 - R^2}{d + 2b}$. Reiese

că punctul N este același pentru q diferiți și poate fi construit.

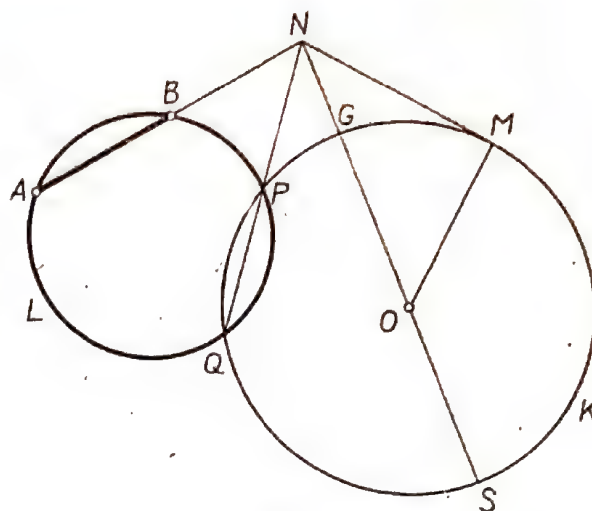


Fig. 114

Construcție. În cercul K se duce o coardă oarecare de lungime q . Se construiește cercul de centru O tangent la aceasta, iar din N se duc tangentele la acest cerc (acestea pot fi construite).

261. Fie x dat în sistemul de bază 10 prin

$$x = u \cdot 10^2 + v \cdot 10 + w, \quad u \neq 0,$$

iar în sistemul având baza z aceleași cifre descriu numărul $y = uz^2 + vz + w$. Deoarece $2x = y$, se obține

$$u(200 - z^2) + v(20 - z) + w = 0, \quad 0 \leq u, v, w \leq 9.$$

Se observă ușor că pentru $z \leq 14$ membrul întâi este pozitiv, deci $z \geq 15$, însă atunci $200 - z^2 \leq 0$ și în consecință $v(20 - z) + w \geq 0$.

Când $z = 15$, se găsește că $-25u + 5v + w = 0$.

a) $u = 1, v = 4, w = 5.$

$u = 1, v = 5, w = 0.$

$u = 1, v \leq 3$, nu convine, fiindcă $w \leq 9$.

$u = 1, v \geq 6$, nu convine, deoarece $w \geq 0$.

b) $u = 2, v = 9, w = 5.$

$u = 2, v < 9$, nu convine.

$u = 2, v < 9$, nu convine.

$u \geq 3$, nu convine.

Cînd $z = 16$, se constată că $-56u + 4v + w = 0$, ceea ce nu convine, fiindcă dacă $v = w = 9$, se găsește $4v + w = 45 < 56$.

Răspuns. 145, 150, 295.

262. Inegalitatea dată este echivalentă cu următoarea :

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \leq 1. \quad (1)$$

Membrul întii al inegalității (1) se scrie succesiv :

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} = \sqrt[n(n+1)]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} \quad (2)$$

Se demonstrează* că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$. Dezvoltînd conform binomului lui Newton, se obține

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1 \cdot n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

Avînd în vedere că suma $\frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}$ se poate majora de unu, iar ceilalți termeni din dezvoltare sînt de asemenea majorați de unu, se obține $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ pentru $n \geq 3$ și, prin

$$\text{urmare, } \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} < \sqrt[n(n+1)]{\frac{n}{n}} = 1.$$

263. Fie $\triangle ABN$ (fig. 115) dreptunghic în N . Segmentul AB este dat. Punctul N aparține astfel sferei construite pe AB ca diametru. Pe de altă parte, N aparține sferei cu același centru și rază r ca și

* Se poate demonstra inegalitatea mai tare $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

cercul K . Într-adevăr, cercul de diametru AM , al cărui plan este perpendicular pe planul cercului K , este situat pe această sferă, iar N este un punct al său. Astfel, punctul N este situat pe cercul γ de intersecție a celor două sfere. Se demonstrează ușor că reciproc, orice punct al cercului γ aparține locului geometric căutat.

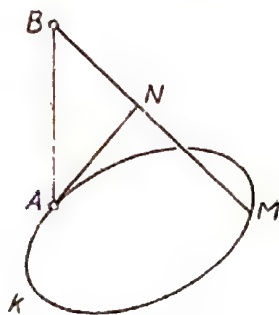


Fig. 115

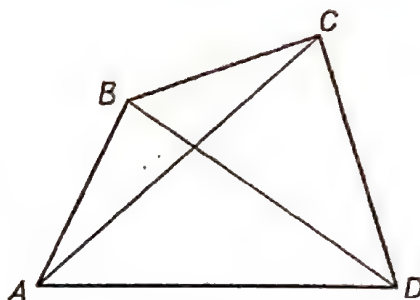


Fig. 116

264. Se reduce la absurd, presupunându-se că (fig. 116)

$$AB \geq AC. \quad (1)$$

În acest caz $\angle BCA \geq \angle ABC$, deoarece în $\triangle ABC$ laturii mai mari i se opune unghiul mai mare. Însă $\angle BCD > \angle BCA \geq \angle ABC > \angle DBC$, deoarece patrulaterul $ABCD$ este convex iar unghiul DBC este o parte a unghiului ABC . S-a stabilit astfel că în $\triangle BCD$, $\angle BCD > \angle DBC$ și deci

$$BD > CD. \quad (2)$$

Adunând inegalitățile (1) și (2), se obține că $AB + BD > AC + CD$, ceea ce contrazice inegalitatea dată $AB + BD \leq AC + CD$, de aceea $AB < AC$.

265. După cum se constată ușor, $\operatorname{ctg} 4 \frac{(2k-1)\pi}{8} = 0$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Se notează $\operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{8} = \alpha_k$. Deoarece $|\alpha_k| \neq 1$,

$$\operatorname{tg} \frac{(2k-1)\pi}{4} = \frac{2\alpha_k}{1-\alpha_k^2} \text{ și } \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{2} = \frac{1 - \left(\frac{2\alpha_k}{1-\alpha_k^2}\right)^2}{2 \frac{2\alpha_k}{1-\alpha_k^2}}, \text{ adică}$$

$$1 - \frac{4\alpha_k^2}{1-2\alpha_k^2+\alpha_k^4} = 0, \text{ rezultînd astfel } \alpha_k^4 - 6\alpha_k^2 + 1 = 0, \text{ ceea ce se cerea demonstrat.}$$

266. Sistemul dat se înlocuiește cu sistemul echivalent :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ kx_1 - x_k = 0, \\ \dots \dots \dots \\ nx_1 - x_n = 0, \end{cases} \quad k \geq 2.$$

Cea de a k -a ecuație se obține din cea de a k -a ecuație a sistemului inițial prin scăderea primei ecuații înmulțite cu k . Astfel $x_k = kx_1$ ($k = 2, 3, \dots, n$). Înlocuind în prima ecuație aceste valori ale lui x_k , se obține

$$x_1(2 + 2^2 + \dots + k^2 + \dots + n^2) = 0.$$

Rezultă $x_1 = 0$ și, în consecință, $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, deci sistemul dat nu admite decât soluția banală.

267. Fie $x^2 - 2x \sin y + 1 \neq 0$, deci membrul întâi al inegalității are sens. Prin transformări succesive ale acestuia se obține

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} \right)^2 - 1 = \\ &= \left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} - 1 \right) \left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} + 1 \right) = \\ &= \frac{(\sin y - 1)(x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 2x \sin y + 1} \frac{(\sin y + 1)(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x \sin y + 1} = \\ &= \frac{(\sin^2 y - 1)(x + 1)^2(x - 1)^2}{(x^2 - 2x \sin y + 1)^2} \end{aligned}$$

Expresia obținută nu este pozitivă pentru nici o valoare a lui x și y pentru care are sens, deoarece $\sin^2 y - 1 \leq 0$, deci

$$\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} \right)^2 - 1 \leq 0$$

sau

$$\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} \right)^2 \leq 1.$$

268. Ecuația dată este echivalentă cu următoarea:

$$|x^2 - 9| - 2|x^2 - 1| + |x| + x + 7 = 0. \quad (1)$$

Membrul întâi al ecuației [notat cu $f(x)$] este reprezentat prin diferite expresii algebrice pe intervalele

$$(-\infty, -3), (-3, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 3), (3, +\infty),$$

după cum se arată în tabloul:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f(x)$	$-x^2$	$-3x^2 + 18$	$x^2 + 14$	$x^2 + 2x + 14$	$-3x^2 + 2x + 18$	$-x^2 + 2x$

Se observă că în punctele care separă două intervale f are aceleași valori. Pe intervalele $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$, $f(x) < 0$, iar pe intervalele $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $f(x) > 0$. În extremitățile intervalelor $(-3, -1)$ și $(1, 3)$, $f(x)$ ia valori de semne contrarii.

Polinomul de gradul al doilea $-3x^2 + 18$ care reprezintă pe $f(x)$ pe intervalul $(-3, -1)$ are rădăcinile $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Rădăcina $x = -\sqrt{6}$ se află în acest interval și de aceea este rădăcină a ecuației (1). Rădăcina $x = \sqrt{6}$ nu este situată pe intervalul $(-3, -1)$ și de aceea se îndepărtează.

Polinomul de gradul al doilea $-3x^2 + 2x + 18$ care reprezintă pe $f(x)$ pe intervalul $(1, 3)$ are rădăcinile $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{55}}{3}$. Rădăcina

$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{55}}{3}$ se află în intervalul $(1, 3)$, fiind deci rădăcină a ecuației (1). Rădăcina $x_4 = \frac{-1 - \sqrt{55}}{3}$ nu se află în intervalul $(1, 3)$ și de aceea va fi îndepărtată.

Răspuns. $x = -\sqrt{6}$ și $x = \frac{-1 + \sqrt{55}}{3}$ sînt rădăcinile ecuației date.

269. Fie x numărul pescarilor din prima echipă, y numărul celor din a doua și z numărul celor din a treia. Din enunț rezultă că

$$13x + 5y + 4z = 113, \quad (1)$$

$$x + y + z = 16. \quad (2)$$

S-a obținut în acest mod un sistem de două ecuații cu trei necunoscute. Condițiile problemei impun ca soluțiile acestui sistem să fie formate din numere întregi pozitive x, y, z . Vom demonstra că având în vedere această condiție, sistemul are soluție unică. Se scade ecuația (2) înmulțită cu 4 din prima, găsindu-se

$$9x + y = 49. \quad (1')$$

sau

$$9x = 49 - y. \quad (3)$$

Fiindcă x și z sînt numere pozitive, $y = 16 - x - z < 16$. Membrul al doilea al egalității (3) este deci număr întreg, divizibil cu 9, cuprins între 33 și 49, ceea ce înseamnă fie că $9x = 36$, fie $9x = 45$. În primul caz $x = 4$; din (3) rezultă $y = 13$ și din (2) rezultă $z = -1$, ceea ce contrazice faptul că z este pozitiv. În cel de-al doilea caz $x = 5$, din (3) rezultă $y = 4$ și din (2) rezultă că $z = 7$.

Răspuns. $x = 5, y = 4, z = 7$.

270. a) Fiind situat pe axa radicală a cercurilor c_1 și c_2 (fig. 117), punctul C are aceeași putere față de cele două cercuri. În consecință $\frac{CQ}{CP} = \frac{CN}{CM}$. În același timp, $\angle QCP$ este comun triunghiurilor CPQ și CMN , deci acestea sînt asemenea, ceea ce înseamnă că $\angle CQP = \angle CNM$, adică patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

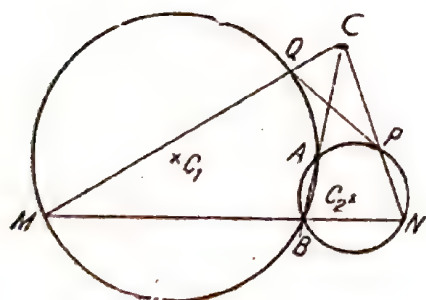


Fig. 117

b) Deoarece patrulaterul $APNB$ este inscriptibil, $\angle CAP = \angle CNB$, iar fiindcă patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil, rezultă $\angle CQP = \angle CNB$. Rezultă astfel că $\angle CQP = \angle CAP$, deci patrulaterul $CQAP$ este inscriptibil, iar CA este însă o coardă fixă în acest patrulater. Perpendicularele pe mijlocul coardelor variabile AP și AQ trec prin centrul cercului circumscris acestui patrulater ca și perpendiculara în mijlocul coardei fixe AC . Locul geometric cerut va fi

Adunând inegalitățile membru cu membru, se obține

$$na + a \sum_{i=1}^n x_i \geq a \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n x_i.$$

Efectuând reducerile, se obține

$$na \geq \sum_{i=1}^n x_i.$$

Din ipoteză însă $na \leq \sum_{i=1}^n x_i$, ceea ce arată că $na = \sum_{i=1}^n x_i$. În aceste condiții fiecare inegalitate nestrictă din șir este o egalitate, deoarece existența unei inegalități stricte ar contrazice egalitatea sumelor. Deci $a + ax_{k-1} = ax_k + x_k$ sau

$$x_k = \frac{a + ax_{k-1}}{a + 1}. \quad (1)$$

Rezultă că $x_2 = \frac{a}{a+1} + \frac{a}{a+1}x_1$. Notînd $\frac{a}{a+1} = \alpha$, se obține, prin inducție :

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha + \alpha x_1, \\ x_3 &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 x_1, \\ x_4 &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^3 x_1, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} x_1, \\ x_1 &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^n + \alpha^n x_1. \end{aligned}$$

Ultima egalitate devine $x_1(1 - \alpha^n) = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$ sau

$$x_1(1 - \alpha)(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}) = \alpha(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-2}).$$

Deci

$$x_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \text{ sau } x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a}{a+1} + \frac{a^2}{a+1} = a.$$

Se presupune $x_{k-1} = a$. Din relația $x_k = \frac{a + ax_{k-1}}{a + 1}$ rezultă că $x_k = \frac{a + a^2}{a + 1} = a$.

273. Membrul întâi f al ecuației reprezintă o sumă de funcții crescătoare, iar membrul al doilea al ecuației reprezintă o sumă de funcții descrescătoare, deci $f(x) \neq g(x)$ pentru orice $x \neq x_0$ pentru care cele două funcții au sens.

274. a) Segmentele AP și AQ (fig. 118) sînt simetricele lui AM față de AB și respectiv AC și deci

$\angle PAB = \angle BAM$ și $\angle QAC = \angle CAM$, rezultînd

$\angle MAP = 2\angle BAM$, $\angle MAQ = 2\angle CAM$, adică

$$\begin{aligned}\angle MAP + \angle MAQ &= 2(\angle BAM + \angle CAM) = \\ &= 2\angle BAC = 180^\circ\end{aligned}$$

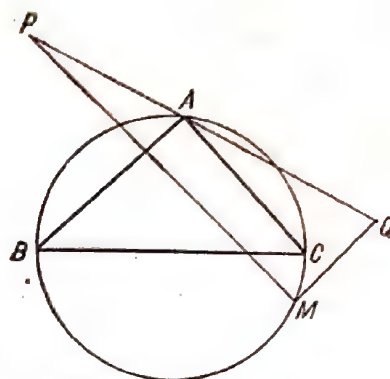


Fig. 118

și deci punctele P , A , Q , sînt coliniare.

b) Segmentele AP și AQ fiind simetricele segmentului AM , rezultă că $AP = AQ = AM$ și deci $PQ = 2AM$.

Pentru ca PQ să fie maxim este necesar ca AM să fie maxim, adică punctul M să fie diametral opus lui A . În acest caz $PQ = 4R$.

c) Pentru ca dreapta AQ să fie tangentă la cercul ABC este necesar și suficient ca $\angle QAC = \frac{\widehat{AC}}{2}$. Datorită faptului că $\angle QAC =$

$$= \angle CAM = \frac{\widehat{MC}}{2}, AQ \text{ este tangentă dacă și numai dacă } AC = MC,$$

adică dacă și numai dacă punctul M este simetricul lui A față de BC .

d) Triunghiul PMQ este dreptunghic în M deoarece mediana AM este jumătate din latura opusă. Centrul cercului PMQ este A iar raza este AM . Pentru ca punctul B să se găsească pe acest cerc este necesar și suficient ca $AB = AM$.

Patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil dacă și numai dacă $AB = AM$.

275. a) Condiția $\Delta \geq 0$ este echivalentă cu $m \in [-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}]$.

$$S_1 = x_1 + x_2 = -m, \text{ deci } S_1 \in [-2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}].$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{(m + 1)^2}{2}.$$

Minimul funcției $P(m) = \frac{(m+1)^2}{2}$, $P: [-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}]$ se realizează când $m = -1$, iar maximul în una din extremitățile domeniului de definiție ($m = -2 - \sqrt{2}$), deci

$$P = x_1 x_2 \in \left[0, \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \right],$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 - m^2 - 2m - 1 =$$

$$= -2m - 1, \text{ deci } S_2 \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}].$$

b) Dacă se elimină m între relațiile dintre rădăcini și coeficienți, se găsește că $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0$, sau $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$, deci $(x_1 - 1)^2 \leq 1$ și $(x_2 - 1)^2 \leq 1$, obținând $x_i \in [0, 2]$ ($i=1, 2$); $x_1 = 0$ dacă $m = 1$ și $x_2 = 2$ dacă $m = -3$. Deci $\max(x_1, x_2) = 2$, iar $\min(x_1, x_2) = 0$.

c) Rezolvarea acestui punct nu prezintă dificultăți.

d) Se notează $a = 3 + \sqrt{5}$, $b = 3 - \sqrt{5}$ și se găsește $a + b = 6$, $ab = 4$, $E_1 = a + b = 6$.

Proprietatea cerută se demonstrează prin inducție completă. Pentru $n = 1$, $E_1 = 6$, deci proprietatea este îndeplinită.

Presupunând că 2^k este divizor al lui E_k ($k < n$), se va arăta că 2^n divide pe E_n .

$$\begin{aligned} E_n &= a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2}) = \\ &= 6(a^{n-1} + b^{n-1}) - 4(a^{n-2} + b^{n-2}). \end{aligned}$$

Faptul că 2^{n-1} este divizor al lui $a^{n-1} + b^{n-1}$ înseamnă că 2^n este divizor al lui $(a + b)(a^{n-1} + b^{n-1})$. Analog, din faptul că $a^{n-2} + b^{n-2}$ se divide cu 2^{n-2} reiese că $ab(a^{n-2} + b^{n-2})$ se divide cu 2^n , deci 2^n este divizor al lui E_n .

Dacă n este impar, se dezvoltă după binomul lui Newton și toți termenii care conțin radicali dispar. Termenii rămași sînt toți multipli de 3.

276. Fie $N = \sum_{i=1}^n x_i$ și S suma din membrul întii al inegalității ce se cere demonstrată. Fie suma $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_1) = 0$.

Această sumă se adună la S astfel :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{(x_3 + x_4 + \dots + x_n)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + (x_1 - x_2) + \\
 &+ \frac{(x_1 + x_4 + \dots + x_n)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + (x_2 - x_3) + \dots \\
 &\dots + \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} + (x_{n-1} - x_n) + \\
 &+ \frac{(x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1})(x_n - x_1)}{x_n + x_1} + (x_n - x_1) = \\
 &= \frac{N(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{N(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{N(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} + \\
 &+ \frac{N(x_n - x_1)}{x_n + x_1} = N \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} + \dots \\
 &\dots + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1}.
 \end{aligned}$$

Evident că $N > 0$. Se va demonstra prin inducție că

$$S_n = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \geq 0.$$

Proprietatea este evidentă pentru $n = 2$. Se presupune $S'_n \geq 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
 S'_{n+1} &= S'_n - \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} + \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}} + \frac{x_{n+1} - x_1}{x_{n+1} + x_1} = \\
 &= S'_n + \frac{(x_1 - x_n)(x_1 - x_{n+1})(x_n - x_{n+1})}{(x_1 + x_n)(x_1 + x_{n+1})(x_n + x_{n+1})}
 \end{aligned}$$

Fiindcă $x_1 \geq x_n > 0$, $x_1 \geq x_{n+1} > 0$ și $x_n \geq x_{n+1}$, rezultă că $S'_{n+1} \geq 0$, inegalitatea fiind astfel demonstrată.

277. $\sum_{k=1}^{2m+1} (a_k - k) = 0$. Aceasta înseamnă că cel puțin unul dintre aceste numere este par, deoarece în caz contrar suma unui număr impar de numere impare ar fi impară, ceea ce încheie demonstrația.

278. Fie $y = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. În acest caz $3 = (y - \sqrt{2})^2 = y^2 - 2\sqrt{2}y + 2$. În continuare, $(y^2 - 1)^2 = 8y^2$, $y^4 - 10y^2 + 1 = 0$. Aceasta înseamnă că polinomul $P_1(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ se anulează pentru $x = y = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. În mod analog se construiește polinomul avînd ca rădăcină pe $z = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$; $3 = (z - \sqrt[3]{2})^3 = z^3 - 3\sqrt[3]{2}z^2 + 6z - 2\sqrt[3]{2}$, $(z^3 - 6z - 3)^2 = (3z^2 + 2)^2 \cdot 2$, obținîndu-se polinomul

$$P_2(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

Polinomul căutat se poate obține înmulțind polinoamele $P_1(x)$ și $P_2(x)$. Acesta se va anula pentru valorile care anulează factorii săi, deci va fi polinomul căutat.

Răspuns.
$$P(x) = x^{10} - 16x^8 + 6x^7 + 73x^6 + 24x^5 - 125x^4 + 354x^3 + 2x^2 - 36x + 1.$$

Se poate demonstra că $P(x)$ are gradul cel mai mic dintre toate polinoamele care satisfac condiția pusă. Un astfel de polinom cu coeficienți întregi va admite ca rădăcini, pe lîngă cele două impuse

și conjugatele lor, adică $\pm \sqrt{2} \pm \sqrt[3]{3}$ și $\pm \sqrt{2} + \epsilon \sqrt[3]{3}$, ϵ fiind o rădăcină cubică oarecare a unității. Aceste numere sînt în total $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$, fiind distincte între ele. Din această cauză gradul polinomului cerut nu poate fi mai mic decît 10.

279. Fie șirul $a_n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2}$; $n = 1, 2, \dots$ și se pune în corespondență fiecărui număr $x \geq \frac{1}{2}$ numărul întreg $k(x)$ după următoarea regulă. Dacă $a_n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2} \leq x \leq \frac{n^2 + (n+1)^2}{2} = a_{n+1}$, se pune $k(x) = n$. Deoarece $a_1 = \frac{1}{2}$, numărul $k(x)$ este definit pentru orice $x \geq \frac{1}{2}$.

Cînd $x \geq \frac{1}{2}$, expresia de sub radicalul care intervine în inegalitate este pozitivă, iar membrul întîi al inegalităţii este dat de un modul, fiind deci pozitiv. Ridicînd ambii membri ai inegalităţii la pătrat, se obţine inegalitatea echivalentă $x^2 - 2n^2x + n^4 \leq x - \frac{1}{4}$ sau

$$x^2 - (2n^2 + 1)x + \left(n^4 + \frac{1}{4}\right) \leq 0. \quad (*)$$

Trebuie arătat faptul că atunci cînd x variază între limitele indicate, polinomul de gradul doi din membrul întîi al inegalităţii (*) este negativ. Se verifică uşor că rădăcinile $x_{1,2} = n^2 + \frac{1}{2} \pm n$ ale polinomului indicat sînt limitele a_n şi a_{n+1} ale intervalului considerat. Întrucît un polinom de gradul al doilea care are coeficientul dominant pozitiv şi rădăcini reale ia pe intervalul dintre rădăcini numai valori negative, inegalitatea (*) este adevărată şi deci afirmaţia din enunţ este demonstrată.

Faptul că polinomul de gradul al doilea verifică inegalitatea respectivă se putea arăta, dealtfel, direct din inegalităţile $a_n \leq x \leq a_{n+1}$, din care se deduce că

$$(x - a_n)(x - a_{n+1}) \leq 0.$$

Înlocuind în această relaţie valorile lui a_n şi a_{n+1} , se obţine inegalitatea (*).

280. Egalitatea care se cere demonstrată se scrie sub forma

$$[a, b, c]^2 (a, b)(b, c)(c, a) = (a, b, c)^2 [a, b][b, a][c, a]. \quad (1)$$

Ambii membri ai egalităţii sînt numere întregi pozitive, demonstraţia egalităţii lor reducîndu-se la a demonstra că aceştia se descompun la fel în factori primi. Este clar că factorii primi care intervin sînt factorii primi ai lui a, b, c . Este suficient a se arăta că fiecare din aceşti factori figurează în ambii membri la aceeaşi putere. Fie unul dintre aceştia p , intervenind în descompunerea lui a la puterea α , în descompunerea lui b la puterea β şi în descompunerea lui c la puterea γ (α, β, γ pot fi nuli). Pe baza simetriei expresiilor considerate faţă de variabilele a, b, c , se poate considera fără a restrînge generalitatea, că $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Se observă că în ambii membri ai egali-

tății (1) factorul p intervine la puterea $2\alpha + \beta + 2\gamma$. Deoarece p este un factor prim oarecare, egalitatea (1) este astfel demonstrată.

281. Din enunț rezultă că toate fețele tetraedrului considerat sînt triunghiuri egale între ele. Se notează cu α, β, γ mărimile unghiurilor acestor triunghiuri. Unghiurile plane cu vîrfurile în vîrfuri ale tetraedrului sînt de asemenea α, β, γ . Din proprietățile unghiurilor plane ale unui triedru se deduce că $\alpha < \beta + \gamma$. Însă $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, deci $\beta + \gamma > 90^\circ$, ceea ce înseamnă că $\alpha < 90^\circ$. În mod analog se demonstrează că $\beta < 90^\circ$ și $\gamma < 90^\circ$.

282. În esență problema este de combinatorică. Este suficient să se calculeze numărul produselor care sînt multipli de 10, dintre toate cele 9^n produse. Este evident că trebuie considerate, în acest scop, toate produsele care au numărul 5 ca factor, iar cel puțin unul din ceilalți factori este par. Se calculează mai ușor numărul elementelor din mulțimea complementară. Numărul produselor care nu conțin pe 5 este 8^n , iar numărul produselor care nu conțin numere pare este 5^n . Printre acestea din urmă se găsesc 4^n produse care nu conțin pe 5 și deci au fost numărate printre acelea. Numărul produselor care sînt multipli de 10 este deci $9^n - (8^n + 5^n - 4^n)$, iar probabilitatea cerută este $1 - \frac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}$.

283. Se constată ușor că mulțimea de numere care se cere nu este unic determinată. Se vor face cîteva observații care vor ajuta să se determine unele din aceste mulțimi. Se deduc mai întîi cîteva condiții necesare care trebuie să fie satisfăcute de aceste numere.

Întrucît inegalitatea dată în enunț este adevărată pentru toate numere raționale, se poate trece la limită în mulțimea numerelor raționale, pentru $r \rightarrow \sqrt[3]{2}$. Se obține astfel

$$2^{\frac{2}{3}}a + 2^{\frac{1}{3}}b + c = 2d + 2^{\frac{2}{3}}e + 2^{\frac{1}{3}}f.$$

Se poate arăta că această egalitate este îndeplinită numai în cazul cînd $a = e$, $b = f$ și $c = 2d$. În acest mod, este necesar să se determine numerele a, b, c , care satisfac condiția

$$\left| \frac{ar^2 + br + 2d - dr^2\sqrt[3]{2} - ar\sqrt[3]{2} - b\sqrt[3]{2}}{dr^2 + ar + b} \right| < |r - \sqrt[3]{2}|$$

sau

$$\left| \frac{ar + b - \sqrt[3]{2}d(r + \sqrt[3]{2})}{dr^2 + ar + b} \right| < 1.$$

Această inegalitate va fi adevărată, în particular, dacă

$$a > d\sqrt[3]{2} > 0, \quad b > d\sqrt[3]{2^2} > 0.$$

Se obțin în acest mod o serie de mulțimi de numere care constituie rezolvări ale problemei, ca, de exemplu :

1) $a = b = 2, d = 1,$

2) $a = b = 3, d = 1$ etc.

284. Fie pentagonul $ABCDE$ care satisface condiția problemei (fig. 119). Deoarece $S_{ABE} = S_{ABC} = 1$, rezultă că $S_{ACE} = S_{BEC}$, punctele A și B sînt deci la aceeași distanță față de dreapta CE și, prin urmare, $AB \parallel EC$ (analog se demonstrează că și celelalte diagonale ale pentagonului sînt paralele cu laturile respective), ceea ce înseamnă că patrulaterul $CDEF$ ($F = AC \cap BE$) este paralelogram și aria lui este egală cu 2 (din condiția ca $S_{CDE} = 1$).

Se notează S_{ABF} cu S_1 și $S_{AFE} = S_{BFC}$ cu S_2 , $S_1 + S_2 = 1$. Prin urmare,

$$S_{ABCDE} = 2 + 2S_2 + S_1 = 3 + S_2.$$

Se calculează, în continuare, S_2 . Comparînd ariile triunghiurilor ABF și AFE și din asemănarea triunghiurilor ABF și CEF rezultă că

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BE}{EF} = \frac{AF}{FC} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}, \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}.$$

Rezolvînd sistemul

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= 1, \\ \frac{S_1}{S_2} &= \frac{S_2}{S_1 + S_2}, \end{aligned}$$

se obține

$$S_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Astfel,

$$S_{ABCDE} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

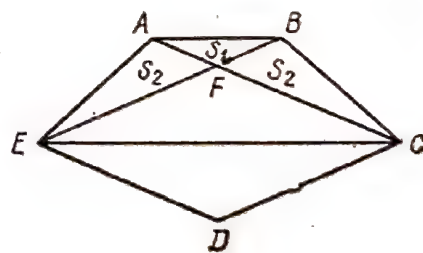


Fig. 119

În continuare se va arăta că este posibilă construirea unei infinități de poligoane care verifică condițiile din enunț. Se construiește, de exemplu, poligonul regulat $ABCDE$ care satisface cerințele enunțului, și apoi acesta este supus unei transformări afine, în care vîrfurile se mișcă pe drepte paralele (v. fig. 120). Pentagonul obținut

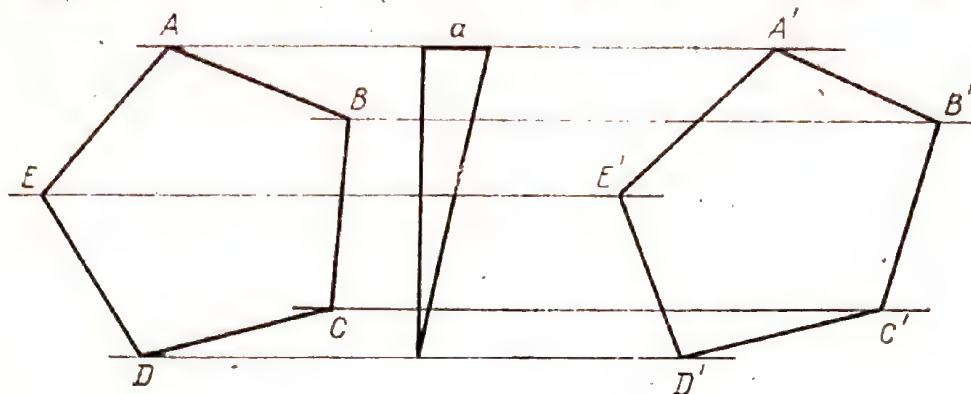


Fig. 120

$A_1B_1C_1D_1E_1$ verifică, de asemenea, condiția din enunț. Fiindcă există o infinitate de astfel de transformări, rezultă că va exista o infinitate de pentoane care satisfac cerințele problemei.

285. Se notează cu P' , respectiv Q' punctele de intersecție ale semidreptelor AP și AQ cu fața BCD (fig. 121). Prin P' și Q' se duce segmentul KL ($K \in BC$, $L \in CD$). Deoarece unghiul $P'AQ'$ este o parte a unghiului KAL , este suficient pentru a rezolva problema să se demonstreze că $\angle KAL \leq 60^\circ$, inegalitate care se stabilește demonstrând că $AK \geq KL$ și $AL \geq KL$.

Din triunghiurile KDL și BKL (fig. 122) se obțin: $\angle KDL < 60^\circ < \angle KLD$ și $\angle LBK < 60^\circ < \angle BKL$, deci $KL \leq KD = AK$, $KL \leq BL = AL$ (egalitatea se realizează cînd $L = D$ sau $K = B$). Astfel, în $\triangle KAL$, $\angle KAL \leq 60^\circ$. Deoarece $\angle P'AQ' = \angle PAQ$ este strict mai mic decît unghiul KAL , înseamnă că $\angle PAQ < 60^\circ$.

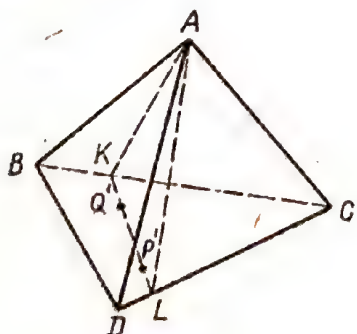


Fig. 121

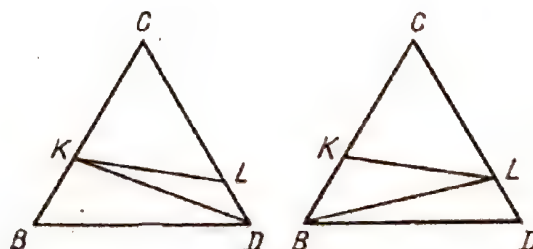


Fig. 122

286. Termenii ambelor șiruri sînt considerați modulo 8. Se arată în acest caz ușor, cu ajutorul inducției, că primul șir, începînd de la al treilea termen, este periodic (modulo 8) :

$$1, 1, 3, 5, 3, 5, 3, \dots \quad (\text{mod } 8)$$

În mod analog se arată periodicitatea celui de-al doilea șir :

$$1, 7, 1, \dots \quad (\text{mod } 8)$$

Deoarece șirurile inițiale sînt crescătoare, singurii termeni comuni sînt $x_0 = x_1 = y_0 = 1$.

287. Se consideră cercul circumscris poligonului. Toate diagonalele poligonului sînt coarde ale cercului, nici una dintre acestea nefiind diametru. Se fixează una dintre diagonale drept cea mai mare latură a triunghiurilor cărora nu le aparține centrul poligonului regulat. Este evident, că cel de-al treilea vîrf al unor astfel de triunghiuri va fi dat de oricare din vîrfurile poligonului situat pe arcul mai mic determinat de această diagonală pe cercul circumscris. Numărul acestor vîrfuri depinde de lungimea diagonalei fiind cuprins între 1 și $n - 1$. Deoarece numărul diagonalelor de o aceeași lungime este $2n + 1$, numărul total al acestor triunghiuri este

$$(2n + 1)(1 + 2 + \dots + n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} (2n + 1).$$

Numărul triunghiurilor ale căror vîrfuri se găsesc printre vîrfurile poligonului dat este dat de formula

$$C_{2n+1}^3 = \frac{(2n + 1)2n(2n - 1)}{3 \cdot 2}.$$

Probabilitatea căutată este astfel

$$\frac{\frac{(2n + 1)2n(2n - 1)}{2 \cdot 3} - \frac{n(n - 1)}{2} (2n + 1)}{\frac{(2n + 1)2n(2n - 1)}{3 \cdot 2}} = \frac{n + 1}{2(2n - 1)}.$$

288. Numerele căutate x, y, z se pot considera rădăcini ale unei ecuații de gradul al treilea

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0. \quad (1)$$

Se determină condițiile care trebuie satisfăcute de coeficienții acestor ecuații. Din formulele lui Viète se obțin :

$$a = x + y + z, \quad (2)$$

(din enunțul problemei $a = 3$),

$$b = xy + yz + zx, \quad (3)$$

$$c = xyz. \quad (4)$$

Ridicînd la pătrat ambii membri ai egalității $x + y + z = 3$, se găsește

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9,$$

rezultînd

$$xy + yz + zx = b = 3, \quad (5)$$

(conform enunțului, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$). Deoarece x, y, z sînt rădăcini ale ecuației (1),

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0,$$

$$z^3 - az^2 + bz - c = 0.$$

Adunînd relațiile membru cu membru și folosind enunțul problemei și relațiile (2) și (5), se obține

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3c. \quad (6)$$

Suma puterilor a patra ale lui x, y, z se determină adunînd egalitățile :

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx = 0,$$

$$y^4 - ay^3 + by^2 - cy = 0,$$

$$z^4 - az^3 + bz^2 - cz = 0.$$

Folosind (6), (2) și (5), se găsește

$$x^4 + y^4 + z^4 = 12c - 9. \quad (7)$$

În mod analog se calculează sumele puterilor de gradul cinci ale lui x, y, z :

$$x^5 + y^5 + z^5 = 30c - 27.$$

Conform enunțului, această ultimă sumă este egală cu 3, deci $c = 1$. Astfel, x, y, z sînt rădăcini ale ecuației

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \text{ sau } (t - 1)^3 = 1.$$

Rădăcinile ecuației în t conduc la rezolvarea sistemului: $x = y = z = 1$.

289. Prin reducere la absurd, se consideră că $\sqrt[3]{p_1}, \sqrt[3]{p_2}$ și $\sqrt[3]{p_3}$ sînt termenii unei progresii aritmetice. În acest caz $\sqrt[3]{p_1} = a, \sqrt[3]{p_2} = a + mr, \sqrt[3]{p_3} = a + nr$, p_i ($i = 1, 2, 3$) fiind numere prime, iar m și n numere întregi. Eliminînd pe a și r , se găsește că

$$\frac{\sqrt[3]{p_2} - \sqrt[3]{p_1}}{\sqrt[3]{p_3} - \sqrt[3]{p_1}} = \frac{m}{n}$$

$$m \sqrt[3]{p_3} - n \sqrt[3]{p_2} = (m - n) \sqrt[3]{p_1}, (m \sqrt[3]{p_3} - n \sqrt[3]{p_2})^3 = (m - n)^3 p_1,$$

$$m^3 p_3 - n^3 p_2 - (m - n)^3 p_1 = 3mn(m - n) \cdot \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}.$$

Ultima egalitate nu este posibilă deoarece în membrul întii se află un număr întreg și în membrul al doilea un număr irațional.

290. Se presupune că au loc egalitățile din enunț și se arată că astfel se ajunge la o contradicție. Se folosește faptul că orice polinom cu coeficienți întregi avînd rădăcina întreagă p se poate reprezenta sub forma

$$Q(x) = (x - p)R(x),$$

$R(x)$ fiind un polinom cu coeficienții de asemenea întregi. Polinoamele $P(x) - b$, $P(x) - c$ și $P(x) - a$ se scriu în acest fel:

$$P(x) - b = (x - a)P_1(x),$$

$$P(x) - c = (x - b)P_2(x),$$

$$P(x) - a = (x - c)P_3(x).$$

Fără a restrînge generalitatea, se consideră că cel mai mare modul al diferenței a două din numerele a, b, c este $|a - c|$. În particular

$$|a - b| < |a - c|. \quad (2)$$

Punînd $x = c$ în prima din egalitățile (1) și avînd în vedere că $P(c) = a$, se obține $a - b = (c - a)P_1(c)$. Întrucît $P_1(c)$ este număr întreg, înseamnă că $|a - b| \geq |c - a|$, ceea ce contrazice relația (2).

În cazul cînd o altă diferență este cea maximă, pentru a ajunge la contradicție trebuie folosite alte egalități date de (1).

291. Pe baza simetriei în a, b, c a expresiilor care intervin în inegalitate, fără a restrînge generalitatea, se poate considera că $a \geq b \geq c$. Printr-un șir de transformări echivalente, inegalitatea dată este adusă la forma $a^{a-b}a^{a-c}b^{b-c} \geq b^{a-b}c^{a-c}c^{b-c}$ și, deoarece $a \geq b \geq c$, această inegalitate este adevărată.

292. Prin cele două puncte date, care se notează cu A și B , se duce un cerc mare pe planul căruia se proiectează arcul dat. Este evidentă suficiența condiției ca proiecția arcului să fie conținută în jumătate din discul mărginit de cercul mare construit, ceea ce reduce problema în spațiu din enunț la o problemă plană. Se folosește faptul că printr-o proiecție ortogonală lungimea arcului se poate modifica numai micșorîndu-se, ceea ce înseamnă că se poate considera că lungimea proiecției arcului este mai mică decît 2. Se duce diametrul CD paralel cu coarda AB , iar centrul cercului se notează cu O . Se demonstrează ușor, că dintre curbele care unesc punctele A și B și intersectează diametrul CD , linia poligonală AOB are lungimea cea mai mică, egală cu 2. În consecință, proiecția considerată, care are lungimea mai mică decît 2, nu poate avea puncte comune cu diametrul CD , fiind deci situată în întregime în jumătatea de disc mărginită de semicercul $CABD$.

293. Fie p probabilitatea cu care tatăl cîștigă partida cu mama, iar q probabilitatea cu care el cîștigă partida cu fiul său, probabilitatea ca fiul să cîștige partida cu mama fiind r . Avînd în vedere toate cazurile posibile în care tatăl cîștigă concursul, se calculează ușor probabilitatea acestui eveniment pentru fiecare din cele trei moduri în care poate fi început concursul. Dacă se începe cu partida dintre tată și mamă, această probabilitate este

$$P_1 = p[q + (1 - q)(1 - r)p] + (1 - p)rpq.$$

din triunghiurile AED , EBF , GFC (fig. 124). Dacă punctul O este situat în interiorul triunghiului EBF , perpendiculara OK pe AC intersectează totdeauna ambele laturi ale pătratului și de aceea $OK > NK = FE > NE > OM$. Dacă acesta este situat în triun-

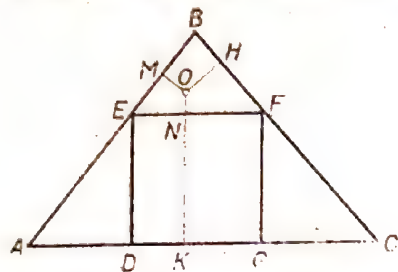


Fig. 124

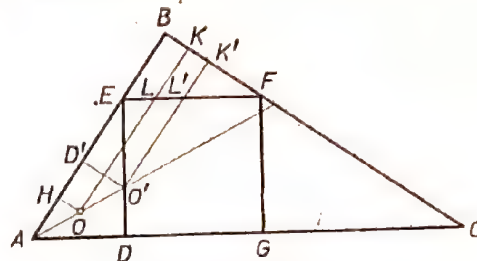


Fig. 125

ghiul AED , perpendiculara OK , dusă din punctul O pe latura BC intersectează fie două laturi alăturate ale pătratului, fie două laturi paralele ale acestuia. În cel de-al doilea caz, evident, segmentul perpendiculararei care este cuprins în interiorul pătratului nu este mai mic decât latura, de aceea $OK > DE > OH = OM$. Fie, în primul caz, L punctul de intersecție al lui OK cu latura EF (fig. 125). Se notează cu O' punctul de intersecție al bisectoarei unghiului A cu latura ED , K' fiind proiecția punctului O' pe BC . Se obține că $OH \leq O'D' < O'E < O'L' < O'K' \leq OK$, adică $OH < OK$. De aceea $OK > OH$ în ambele cazuri, ceea ce contrazice presupunerea inițială.

296. Fiecărui elev i se atribuie un număr format din cinci cifre, cifra a k -a dintre acestea fiind 1 dacă elevul a rezolvat problema a k -a și 0 în caz că nu a rezolvat-o. Conform primei condiții din enunț fiecare număr nu se atribuie mai mult decât unui elev (elevi diferiți vor avea, în această corespondență, numere diferite). Nu pot fi astfel mai mult decât $2^5 = 32$ elevi participanți. Se va arăta că cea de-a doua condiție nu poate fi îndeplinită dacă numărul elevilor este exact 32. Se presupune că o anumită grupă de probleme nu a fost rezolvată de nici un elev, adică numărul $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1$ nu a fost atribuit nici unui elev. Deoarece la olimpiadă a participat cel puțin un elev, fie numărul atribuit acestuia $b_5 b_4 b_3 b_2 b_1$. Se construiește succesiunea de numere :

$$\begin{aligned} N_0 &= b_5 b_4 b_3 b_2 b_1, & N_1 &= b_5 b_4 b_3 b_2 a_1, & N_2 &= b_5 b_4 b_3 a_2 a_1, \\ N_3 &= b_5 b_4 a_3 a_2 a_1, & N_4 &= b_5 a_4 a_3 a_2 a_1, & N_5 &= a_5 a_4 a_3 a_2 a_1. \end{aligned}$$

În această succesiune sau două numere vecine N_{i-1} și N_i coincid pentru $b_i = a_i$ și de aceea sînt numere ale unuia și aceluiași elev, sau se deosebesc prin cifra de indice i , care dacă se neglijează, se

obține una și aceeași grupă de probleme și deci elevului cu numărul N_{i-1} îi corespunde conform celei de-a doua condiții elevul N_i . Deoarece numărul N_0 a fost atribuit, înseamnă că au fost atribuite și numerele N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 . Contradicția obținută arată că toate numerele au fost atribuite, deci numărul elevilor este 32.

297. În $\triangle ABC$ fie $BC > AB$ și deci $\hat{A} > \hat{C}$. Se notează cu O ortocentrul triunghiului. Se examinează următoarele posibilități:

1) \hat{A} este ascuțit (fig. 126). Se consideră triunghiurile dreptunghice BOC' și BOA' , în care $\sphericalangle BOA' = \hat{C}$ și $\sphericalangle BOC' = \hat{A}$ iar OC'

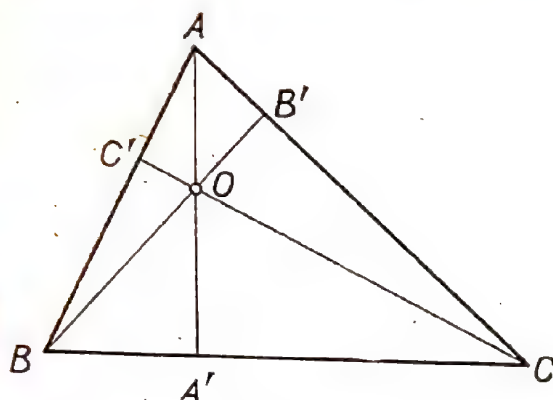


Fig. 126

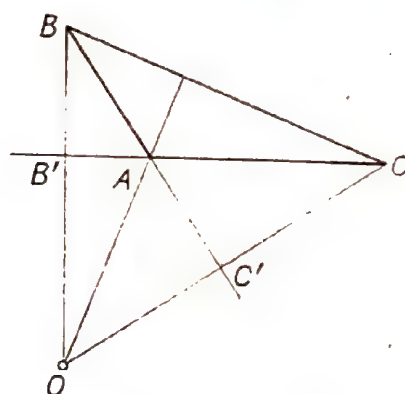


Fig. 127

este distanța de la punctul O la latura AB , OA' distanța de la același punct la latura BC .

$$OC' = OB \cdot \cos \hat{A} \text{ și } OA' = OB \cdot \cos \hat{C},$$

însă $\cos \hat{A} < \cos \hat{C}$ și deci $OC' < OA'$.

II) \hat{A} este drept. În acest caz punctul O coincide cu punctul A , iar punctul C' coincide cu A , de aceea $OC' = 0$ și $OA' = h$ este distanța de la vârful A la ipotenuză.

III) \hat{A} este obtuz (fig. 127). În acest caz $\sphericalangle BOC' = 180^\circ - \hat{A}$, însă $180^\circ - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ și, prin urmare, $\sphericalangle BOC' > \hat{C}$. Restul raționamentelor sînt aceleași ca și pentru triunghiul ascuțitunghic.

298. Desfăcînd parantezele și identificînd coeficienții celor două polinoame, se găsește că:

$$1) a + b + c = a, \quad 2) ab + bc + ca = b, \quad 3) abc = c, \quad \text{adică}$$

$$1') b = -c, \quad 3') c = 0 \text{ sau } 3'') ab = 1.$$

Cazul I. $c = 0$. Conform cu 1') înseamnă că $b = 0$ și relația 2) este satisfăcută, oricare ar fi valoarea lui a .

Cazul II. $ab = 1$. Se înlocuiește c în 2) și în 1'), obținându-se că $b = ab + bc + ca = ab - b^2 - ab = -b^2$, adică sau $b = -1$ sau $b = 0$. Dacă $b = 0$, înseamnă că și $c = 0$, ajungînd din nou la cazul I. Dacă $b = -1$, rezultă $c = 1$ și din 3'') $a = -1$.

Astfel, $x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$, a fiind arbitrar, sau $x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + 1)$.

299. Desfăcînd parantezele și reducînd termenii asemenea, se obține:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd)(a^2 + b^2) - a^2d^2 - b^2c^2 + 2abcd = \\ & = (a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)(a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2)(ac + bd) - a^2d^2 - \\ & - b^2c^2 + 2abcd = (a^2 + b^2)^2 + a^2c^2 + b^2d^2 - 2(a^2 + b^2)(ac + bd) + \\ & + 2abcd = (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(ac + bd) + (ac + bd)^2 = \\ & = (a^2 + b^2 - ac - bd)^2. \end{aligned}$$

300. Se descrie un cerc avînd ca diametru diagonala care iese din unghiul ascuțit. Celelalte două vîrfuri ale patrulaterului sînt situate în interiorul acestui cerc, deoarece prin enunț unghiurile din aceste vîrfuri sînt obtuze și deci diagonala care trece prin acestea este mai scurtă decît diametrul.

301. Conform condiției (a) există persoane care au televizoare, însă nu sînt zugravi. O astfel de persoană nu poate frecventa zilnic strandul, deoarece conform condiției (b) ar însemna că nu are televizor. Astfel, toți aceștia nu frecventează zilnic strandul, și deoarece sînt posesori de televizoare, afirmația (c) este adevărată, deci (c) rezultă din (a) și (b).

302. Fie $\angle QOM = \varphi$, deci $ON = R \cos \varphi$, iar $OM = \frac{R}{\cos \varphi}$ (fig. 128). Se notează $\angle MOP$ prin θ , din $\triangle OPN$ găsindu-se că $PO \cdot \cos \theta = NO$, adică $PO \cdot \cos \theta = R \cos \varphi$ și deci $\cos \theta = \frac{R \cos \varphi}{PO}$.

Fie M' proiecția punctului M pe OP , deci

$$M'O = \frac{R}{\cos \varphi} \cos \theta = \frac{R \cdot R \cos \varphi}{PO \cos \varphi} = \frac{R^2}{PO} = \text{const.}$$

Din această cauză punctul M este situat pe perpendiculara dusă pe PO la distanța $\frac{R^2}{PO}$ de punctul O . Reciproc, se poate ușor demonstra că orice punct al acestei perpendiculare este punct de intersecție al tangentei în Q la cerc cu perpendiculara dusă din O pe PQ .

303. În locul maximului expresiei $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ poate fi considerat maximul expresiei

$\frac{3}{2} \left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2 \right) = 4a^2 + 3b^2$. Se

folosește următoarea propoziție auxiliară:

Dacă $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$, rezultă că

$$|u - v| \leq 2. \quad (1)$$

Egalitatea se realizează dacă și numai dacă $u = 1$, $v = -1$ sau $u = -1$, $v = 1$. Inegalitatea (1) se aplică la funcția $|f(x)| \leq 1$, pentru $x = 1$ și $x = 0$, găsind

$$2 \geq |f(1) - f(0)| = |a + b + c - c| = |a + b|.$$

Deci

$$(a + b)^2 \leq 4. \quad (2)$$

Pentru $x = -1$ și $x = 0$ se obține

$$2 \geq |f(-1) - f(0)| = |a - b + c - c| = |a - b|.$$

Deci

$$(a - b)^2 \leq 4. \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) se obține $4a^2 + 3b^2 = 2(a + b)^2 + 2(a - b)^2 - b^2 \leq 16$. Egalitatea se realizează când $b = 0$ și, în consecință,

$$|a + b| = |a - b| = |a| = 2.$$

În acest caz $|f(1) - f(0)| = |(a + c) - c| = |a| = 2$. Din (1) rezultă că $|c| = 1$ și $|a + c| = 1$. Astfel, sau $c = 1$, $a = -2$, $b = 0$ sau $c = -1$, $a = 2$, $b = 0$. În aceste două cazuri când $0 \leq |x| \leq 1$,

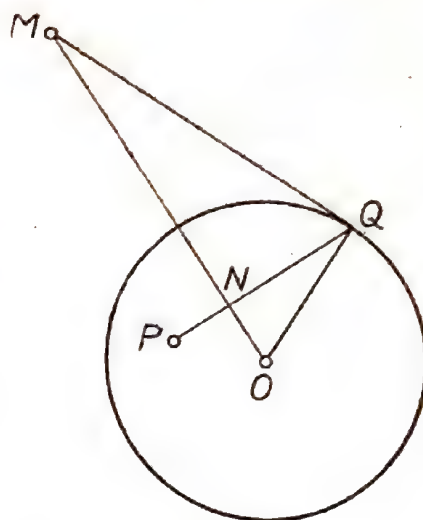


Fig. 128

se găsește că $0 \leq x^2 \leq 1$, $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$. Astfel $|2x^2 - 1| = |-2x^2 + 1| = |ax^2 + bx + c| \leq 1$, caz în care $\max \left(\frac{8}{3} a^2 + 2b^2 \right) = \frac{2}{3} (4a^2 + 3b^2) = \frac{2}{3} \cdot 16 = \frac{32}{3}$.

$$304. \frac{k}{k+l} + \frac{n-k}{n-(k+l)} = 2 + l \left(\frac{1}{n-(k+l)} - \frac{1}{k+l} \right) = 2 + S.$$

Se va arăta că $S_{\max} = n - 2$ dacă $n \geq 2$. Se examinează următoarele două cazuri posibile:

a) $k + l > n$. În acest caz $\frac{1}{n-(k+l)} < 0$ și $S < 0 \leq n - 2$.

b) $k + l < n$. Rezultă $k + l \leq n - 1$, și deoarece $k \geq 0$, înseamnă că $l \leq n - 1$. Rezultă din aceasta că

$$S = l \left(\frac{1}{n-(k+l)} - \frac{1}{k+l} \right) \leq (n-1) \left(\frac{1}{n-(n-1)} - \frac{1}{n-1} \right) = n-2,$$

adică $S \leq n - 2$. Egalitatea se realizează dacă și numai dacă $k + l = n - 1$, adică $l = n - 1$, $k = 0$. Cazurile $n = 2$ și $n = 1$ se cercetează în mod asemănător.

În final se obține:

I. Dacă $n > 2$, rezultă $l = n - 1$, $k = 0$ și maximul expresiei este n .

II. Dacă $n = 2$, rezultă $l = 0$, oricare ar fi $k \neq 2$, sau $l = 1$, $k = 0$ și maximul expresiei este n .

III. Dacă $n = 1$, rezultă $l = 0$, oricare ar fi $k > 1$, iar maximul expresiei este 2.

305. $x_k^2 = x_k - x_{k+1}$. Prin urmare, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1}) = x_1 - x_{n+1} < x_1 < 1$, deoarece toți x sînt pozitivi.

306. Rezolvarea I. Din punctul arbitrar O se duc vectori în punctele $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ (fig. 129) care se notează respectiv cu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1, \vec{d}_1$. Se obține:

$$\vec{a} + \vec{a}_1 = 2\vec{b}, \quad (1) \quad \vec{c} + \vec{c}_1 = 2\vec{d}, \quad (3)$$

$$\vec{d} + \vec{d}_1 = 2\vec{c}, \quad (2) \quad \vec{a} + \vec{a}_1 = 2\vec{d}. \quad (4)$$

Din relația (1) se deduce

$$\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a}_1. \quad (5)$$

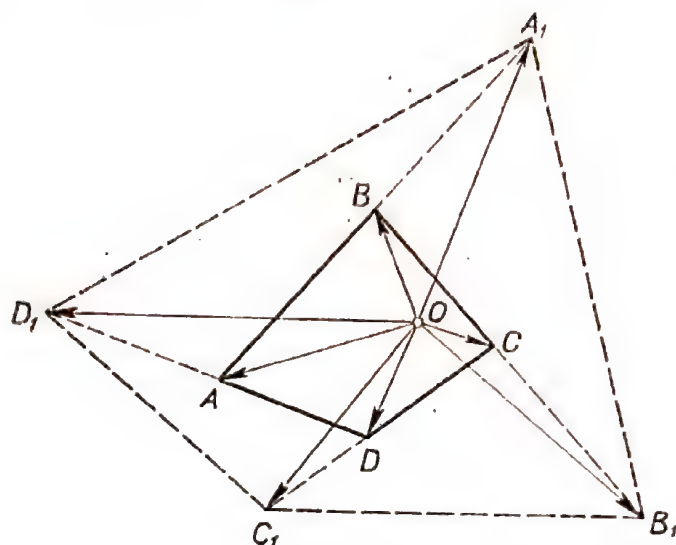


Fig. 129

Se înlocuiește în relația (5) $\vec{b} = 2\vec{c} - \vec{b}_1$, dat de relația (2) și se găsește

$$\vec{a} = 4\vec{c} - 2\vec{b}_1 - \vec{a}_1. \quad (6)$$

Din relația (3) se găsește $\vec{c} = 2\vec{d} - \vec{c}_1$ și se înlocuiește în relația (6), găsim că $\vec{a} = 8\vec{d} - 4\vec{c}_1 - 2\vec{b}_1 - \vec{a}_1$, iar din relația (4) rezultă că $d = 2\vec{a} - \vec{d}_1$. Ținând seama de această exprimare a lui \vec{d} ,

$$\vec{a} = 16\vec{a} - 8\vec{d}_1 - 4\vec{c}_1 - 2\vec{b}_1 - \vec{a}_1.$$

Rezultă astfel că $\vec{a} = \frac{1}{15}(8\vec{d}_1 + 4\vec{c}_1 + 2\vec{b}_1 + \vec{a}_1)$. Vectorii \vec{a}_1 , \vec{b}_1 ,

\vec{c}_1 , \vec{d}_1 sînt cunoscuți. Se poate deci construi vectorul \vec{a} , ceea ce înseamnă că se găsește astfel punctul A , iar B este mijlocul lui AA_1 , C al lui BB_1 și D este mijlocul lui CC_1 .

Rezolvarea II. Se consideră omotetia V_{A_1} de centru A_1 și raport $\frac{1}{2}$ (fig. 130). În această omotetie punctul A se transformă în punctul B . Transformările analoage V_{B_1} , V_{C_1} , V_{D_1} transformă

succesiv punctul B în C , C în D , D în A , iar produsul $V = V_{A_1}V_{B_1}V_{C_1}V_{D_1}$ transformă pe A în el însuși. Transformarea V este o omotetie de centru A și raport $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

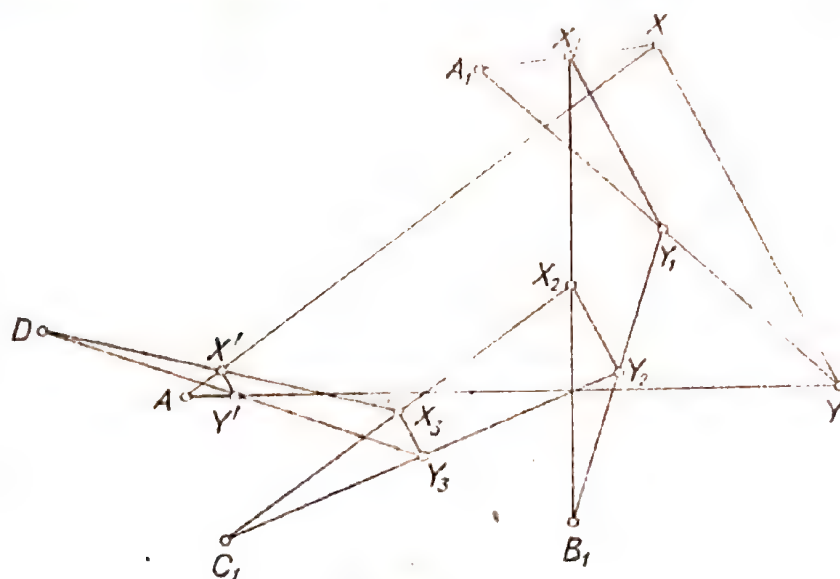


Fig. 130

Rezultă astfel următoarea construcție: se ia segmentul arbitrar XY și se construiește transformatul său $V(XY) = X'Y'$. Punctul A se va afla la intersecția dreptelor XX' și YY' .

307. Fie h_a și h_b înălțimile corespunzătoare laturilor a și b ale triunghiului. Conform enunțului $h_a \geq a$ și $h_b \geq b$. Pe de altă parte, întrucât perpendiculara are totdeauna lungimea mai mică decât lungimea oblicei duse din același punct, $h_a \leq b$ și $h_b \leq a$. Rezultă că $a \leq h_a \leq b \leq h_b \leq a$, ceea ce este posibil numai în cazul când $a = h_a = b = h_b = a$. Astfel, laturile a și b sînt egale și perpendiculare, deci triunghiul este dreptunghic isoscel.

Răspuns: Unghiurile triunghiului au mărimile respectiv 90° , 45° , 45° .

308. Se presupune că $m(m+1)$ este puterea de ordin k a unui număr întreg oarecare.

În acest caz, deoarece m și $m+1$ sînt, evident, relativ prime, fiecare din acestea trebuie să fie puterea de ordin k a unui număr întreg. Într-adevăr, dacă se descompune numărul $m(m+1)$ în factori primi: $m(m+1) = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$, fiecare r_i trebuie să fie divizibil cu k , iar fiecare factor $p_i^{r_i}$ trebuie să intre fie în descompunerea lui m , fie în cea a lui $m+1$.

Două numere naturale vecine m și $m + 1$ nu pot fi însă puteri de ordinul k ale unor numere întregi (dacă $a^k = m$, înseamnă că

$$(a + 1)^k > (a + 1)a^{k-1} = a^{k-1} + a^k > m + 1; \quad k > 1).$$

309. Un număr dă la împărțirea prin 9 totdeauna același rest ca și suma cifrelor sale. Într-adevăr, dacă cifrele numărului sînt, începînd cu ultima, a_0, a_1, \dots, a_n , numărul însuși este $a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n$, suma cifrelor sale este $a_0 + a_1 + \dots + a_n$, iar diferența $a_0 + 10a_1 + \dots + 10^n a_n - a_0 - a_1 - \dots - a_n = 9a_1 + 99a_2 + \dots + 99 \dots 9a_n$, evident, se divide cu 9. De aceea, în problema de

față 1 se obține din acele numere, care dau restul 1 la împărțirea prin 9, adică din numerele 1, 10, 19, ..., 1 000 000 000; 2 se obține din numerele care dau restul 2 la împărțirea prin 9, adică din numerele 2, 11, 20, ..., 999 999 992. Este evident că primele sînt mai multe cu 1.

Răspuns. Numărul 1 se repetă o dată mai mult decît 2.

310. Întrucît suma unghiurilor unui hexagon este 720° , fiecare unghi al unui hexagon convex cu unghiuri egale trebuie să fie de 120° . Laturile opuse ale unui astfel de hexagon sînt paralele.

a) Se presupune, fără a restrînge generalitatea, că $AB > ED$. Dacă se construiesc, în continuare, paralelogramele $ABCK$, $CDEL$, $EFAM$ (fig. 131), fiecare unghi al triunghiului format astfel este de 60° , deci $KL = LM = MK$. Însă $KL = KC - LC = AB - DE$, $LM = LE - ME = CD - FA$, $MK = MA - KA = FE - BC$, rezultînd egalitatea cerută $AB - DE = CD - FA = FE - BC$.

b) Fără a restrînge generalitatea se presupune că $a_1 > a_4$ (în caz contrar se poate lua $a'_1 = a_4$, $a'_2 = a_5$, $a'_3 = a_6$, $a'_4 = a_1$, $a'_5 = a_2$, $a'_6 = a_3$, evident). Se construiește triunghiul echilateral KLM avînd latura $KL = LM = MK = a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Se poartă segmentul $LC = a_4$ pe prelungirea laturii KL , segmentul $ME = a_6$ pe prelungirea laturii LM și segmentul $KA = a_2$ pe prelungirea laturii MK și se construiesc paralelogramele $AKCB$, $CLED$, $EMAF$. Este ușor să se arate, că hexagonul $ABCDEF$ satisface condițiile din enunț, adică toate unghiurile sale sînt de 120° , iar $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$, $DE = a_4$, $EF = a_5$, $FA = a_6$.

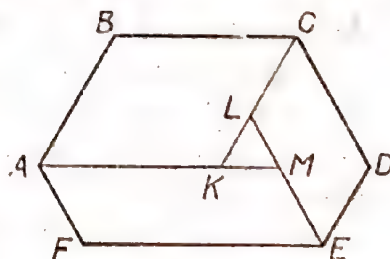


Fig. 131

311. Ridicînd ambii membri ai ecuației la pătrat și izolînd radicalul rămas se observă că acesta este egal cu $y^2 - x$, deci este un număr întreg. Repetînd raționamentul, se ajunge la concluzia că $\sqrt{x} + \sqrt{y} = m$ și $\sqrt{x} = k$ trebuie să fie numere întregi, deci $x = k^2$ și $x + \sqrt{y} = m^2$, adică $k(k+1) = m^2$. Ultima egalitate este imposibilă cînd $k > 0$ deoarece k^2 este mai mic decît $k(k+1)$ iar $(k+1)^2$ este deja mai mare decît $k(k+1)$, în consecință $k < m < k+1$, adică m nu poate fi întreg.

Răspuns. Singura soluție a ecuației în numere întregi este dată de $x = 0$, $y = 0$.

312. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 (fig. 132) picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile A, B, C, D ale patrulaterului $ABCD$ pe diagonalele sale BD, AC, BD, AC , respectiv. Fie K punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD . Se demonstrează că $\triangle AKB \sim \triangle A_1KB_1$, $\triangle BKC \sim \triangle B_1C_1K$, $\triangle CKD \sim \triangle C_1KD_1$ și $\triangle DKA \sim \triangle D_1KA_1$, rezultînd, evident, asemănarea patrulaterelor $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$, adică egalitatea unghiurilor lor și proporționalitatea laturilor analoage.

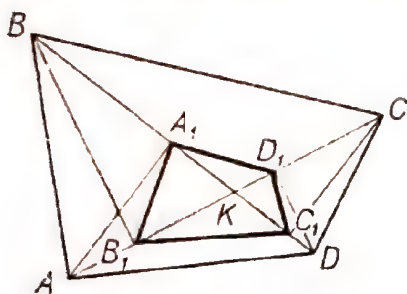


Fig. 132

Pentru a demonstra asemănarea triunghiurilor pot fi studiate unghiurile acestora, dar este mai simplu să se folosească următoarea proprietate geometrică: dacă X, X_1, Y_1, Y sînt patru puncte oarecare, situate pe un cerc, iar K este punctul de intersecție al dreptelor XY_1 și YX_1 , rezultă că $\triangle XKY \sim \triangle X_1KY_1$. Egalitatea unghiurilor acestor triunghiuri se deduce din teorema asupra unghiului înscris în cerc (este necesar studiul diferitelor așezări ale punctelor X, X_1, Y, Y_1 pe cerc; acestea pot fi așezate într-unul din următoarele moduri: X, X_1, Y_1, Y ; X, Y_1, X_1, Y ; X, X_1, Y, Y_1 ; ultimul mod nu poate fi întîlnit în cadrul problemei de față, cînd patrulaterul $ABCD$ este convex). Pentru demonstrarea asemănării perechii de triunghiuri care interesează, se observă că punctele A_1 și B_1 se află pe cercul de diametru AB , deoarece $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$. Absolut analog punctele B_1 și C_1 se găsesc pe cercul de diametru BC , punctele C_1 și D_1 pe cercul de diametru CD , iar punctele D_1 și A_1 sînt situate pe cercul de diametru DA .

313. Orice număr natural care nu este prim sau pătrat de număr prim, poate fi reprezentat totdeauna sub forma $n = ab$, a și b fiind numere naturale diferite mai mici decît n . În continuare se studiază în ordine aceste cazuri.

Fie $n = ab$ ($a > 1$, $b > 1$, $a \neq b$). Întrucît n este impar, a și b sînt impare, ceea ce înseamnă că $a \geq 3$, $b \geq 3$. De aceea în produsul $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (ab-1)$ intră ca factori a și $2a$ (întrucît $ab-1 \geq 3a-1 > 2a$), și de asemenea b și $2b$. Toate cele patru numere a , $2a$, b , $2b$ sînt evident diferite, a și b impare, $2a$ și $2b$ pare, $a \neq b$, $2a \neq 2b$. Rezultă că $(n-1)!$ este divizibil cu $a^2b^2 = n^2$.

Fie, în continuare, $n = p^2$, p fiind un număr prim. Dacă $p^2 - 1 \geq 4p$, înseamnă că $p^2 - 1 \geq 4p > 3p > 2p > p$, și, în consecință, $(p^2-1)!$ se divide cu $p^4 = n^2$. Aceasta rezultă evident din faptul că pentru $p \geq 5$, $p^2 - 4p - 1 \geq (p-4)p - 1 \geq 1 \cdot 5 - 1 > 0$.

Rămîn următoarele posibilități: $n = 3^2 = 9$, sau n este număr prim. Se arată ușor că pentru toate aceste valori ale lui n , numărul $(n-1)!$ nu se divide la n^2 . Într-adevăr, cînd n este număr prim, $(n-1)!$ nu se divide nici la n . Pentru $n = 9$, $(9-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ se divide numai prin 3^2 și nu se divide prin $9^2 = 3^4$.

Răspuns: n este orice număr prim par sau numărul 9.

314. Se duc perpendicularele din punctul O pe laturile patrulaterului, obținîndu-se patru perechi de triunghiuri egale, rezultînd deci că (fig. 133) $\hat{1} = \hat{2}$, $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{6}$, $\hat{7} = \hat{8}$.

Întrucît $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360^\circ$,

iar $\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - (\hat{2} + \hat{3} + \hat{6} + \hat{7}) = \hat{1} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{8}$, din egalitățile scrise mai sus se deduce că $\angle AOB + \angle COD$ este egal cu jumătate din unghiul de 360° , adică 180° , ceea ce trebuia demonstrat.

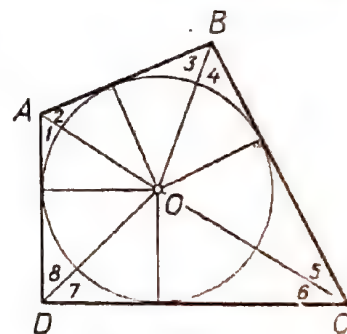


Fig. 133

315. Expresia $k^n - b^n$ este divizibilă totdeauna cu $k - b$, întrucît $k^n - b^n = (k - b)(k^{n-1} + k^{n-2}b + k^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ (k și b sînt numere arbitrare diferite, $k \neq b$). Astfel, $(k^n - b^n) - (k^n - a^n) = a^n - b^n$ se divide cu $k - b$ pentru orice $k \neq b$, adică se divide cu orice număr întreg nenul, ceea ce se poate realiza numai în cazul cînd $a^n - b^n = 0$, adică $a = b$.

Greșeala caracteristică întîlnită în lucrările concurenților la rezolvarea acestei probleme era recurgera la teorema lui Bézout. O astfel de cale este principal greșită, deoarece în teorema lui Bézout este vorba despre divizibilitatea polinoamelor, iar în problemă intervine divizibilitatea numerelor.

316. Fie k^2 numărul care se obține prin ștergerea ultimelor două cifre ale lui n^2 , acesta din urmă neterminîndu-se în două zerouri. Această condiție se poate scrie sub forma: $0 < n^2 - 100k^2 < 100$.

Prima inegalitate este echivalentă cu $n > 10k$, adică $n \geq 10k + 1$. A doua inegalitate $n^2 - 100k^2 < 100$ nu este adevărată pentru $k \geq 5$. Întrucît se obține chiar pentru $10k + 1$, cea mai mică valoare posibilă pentru n , $(10k + 1)^2 - (10k)^2 = 20k + 1 > 100$, pentru $k = 4$ este convenabil numai $n = 10k + 1 = 41$, deoarece $42^2 - 1600$ deja depășește pe 100; pentru $k \leq 3$ nu se obțin valori ale lui n^2 care să depășească 1000, întrucît

$$n^2 < 100k^2 + 100 \leq 100 \cdot 9 + 100 = 1000.$$

Răspuns : $1681 = 41^2$.

317. Segmentele care compun drumul gîndacului se numerotează în ordinea parcurgerii lor. Se convine ca una din cele trei direcții ale liniilor rețelei să se numească *orizontală* și se studiază care pot fi numerele segmentelor orizontale care intră în compunerea drumului gîndacului. Fie a și b două segmente orizontale vecine, în sensul că între ele nu se găsesc alte segmente orizontale, adică între a și b întreg drumul gîndacului este constituit de segmente de altă direcție decît cea orizontală. Este clar astfel că situația reprezentată de linia îngroșată din figură (134.a), cînd gîndacul parcurge latura

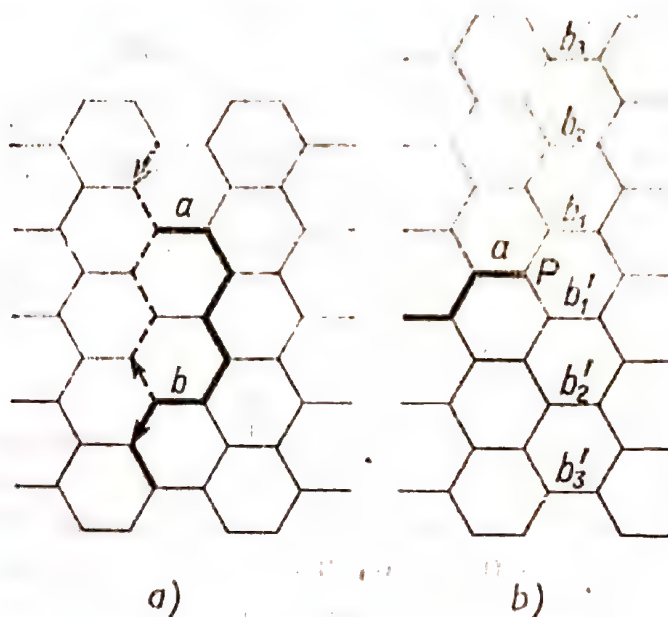


Fig. 134

a într-un sens și latura b în sens opus, este imposibilă : în acest caz o parte din drumul gîndacului poate fi scurtat, cum este arătat prin linia punctată. Rezultă astfel că toate segmentele orizontale care sînt întîlnite în drum de gîndac, se parcurg în unul și același sens.

Dacă gîndacul ajunge în punctul P (fig. 134, b) pe segmentul a , următorul segment orizontal din drumul său va fi numai unul din segmentele b_1, b_2, b_3, \dots sau b'_1, b'_2, b'_3, \dots . Se observă ușor că numărul segmentelor intermediare între a și b este neapărat impar, adică segmentele a și b au aceeași paritate. Rezultă astfel că numărul tuturor segmentelor orizontale care intră în drumul gîndacului au aceeași paritate. Deoarece rețeaua este simetrică în cele trei direcții, s-a demonstrat astfel că 1) gîndacul nu se mișcă decît pe cel mult trei direcții diferite, segmentele unei direcții date fie nefiind parcurse deloc, sau fiind parcurse în un singur sens. 2) numerele tuturor segmentelor de direcție dată care intră în compunerea drumului gîndacului au aceeași paritate. Se deduce în continuare cu ușurință, că sau toate segmentele cu numere pare au același sens de parcurgere, sau toate segmentele cu numere impare. Întrucît drumul gîndacului conține cîte 50 din fiecare din aceste două tipuri, afirmația din enunț este demonstrată.

Observație. Această problemă a fost una din cele mai grele la olimpiadă. Se pot da cîteva alte rezolvări diferite (de exemplu, se poate folosi inducția față de lungimea $2n$ a drumului gîndacului, sau descompunerea vectorului AB după trei direcții paralele cu liniile rețelei), toate fiind însă destul de complicate.

318. După ce au fost așezate parantezele în expresia $x_1 : x_2 : \dots : x_n$, fiecare semn de împărțire leagă două expresii, prima din acestea trebuie să fie împărțită la a doua (fiecare din aceste expresii poate fi o literă separată x_k sau o paranteză conținînd cîteva astfel de litere). Se vor face împărțirile în ordinea indicată și se va scrie de fiecare dată rezultatul sub forma unei fracții

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}}{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_q}}$$

Dacă A și B sînt două astfel de fracții și trebuie împărțită A la B , se înmulțește fracția A cu inversa fracției B , adică la numărătorul fracției A se înmulțesc toți x_k de la numitorul fracției B , iar la numitorul fracției A toți x_k de la numărătorul fracției B . Rezultă în final că fiecare x_k se găsește la numărător sau la numitor după cum s-a împărțit de un număr de ori par sau impar la expresia care conținea pe x_k , cu alte cuvinte în funcție de numărul semnelor de împărțire care precedau pe x_k și se refereau la expresia care conținea pe x_k .

După aceste observații preliminare se trece la examinarea problemei: care fracții pot fi obținute așezînd în diferite moduri parantezele în expresia $x_1 : x_2 : \dots : x_n$. Este evident că x_1 va fi situat totdeauna la numărător (înaintea sa nu există semne de împărțire

care să-l poată transforma în numitor). Este aproape evident că x_2 va fi totdeauna la numitor (semnul de împărțire așezat înaintea lui x_2 se referă la acesta sau la o expresie care îl conține). Este mult mai puțin evidentă distribuirea celorlalte litere x_3, x_4, \dots, x_n la numitor sau numărător într-un mod total arbitrar; principala dificultate a problemei constă în demonstrarea acestei afirmații. Va rezulta din aceasta că se pot găsi 2^{n-2} fracții: fiecare dintre x_3, x_4, \dots, x_n poate intra în componența numărătorului sau a numitorului. Se dau în continuare două demonstrații.

P r i m a d e m o n s t r a ț i e. Pentru a se obține fracția

$$\frac{x_1 x_{i_1} \dots x_{i_2-1} x_{i_2} x_{i_3+1} \dots x_{i_4-1} x_{i_4} \dots}{x_2 x_3 \dots x_{i_1-1} x_{i_1} x_{i_2+2} \dots x_{i_3-1} x_{i_3} x_{i_4+1} \dots x_{i_5-1} x_{i_5} \dots}, \quad (*)$$

$$(2 \leq i_1 \leq i_2 < i_3 \dots < i_m = n),$$

trebuie mai întâi să se facă „în ordine” împărțirile $(\dots ((x_1 : x_2) : x_3) : \dots : x_{i_1-1}) = P_1$ și în general

$$(\dots (x_{i_k} : x_{i_{k+1}}) : \dots : x_{i_{k+1}-1}) = P_k, \dots x_{i_m} = P_m,$$

iar apoi în „ordine inversă”:

$$P_1 : (P_2 : \dots : (P_{m-1} : P_m) \dots).$$

Faptul că se obține fracția cerută se poate arăta fie direct (observînd că $P_k = \frac{x_{i_k}}{x_{i_{k+1}} \dots x_{i_{k+1}-1}}$) fie cu ajutorul criteriului arătat anterior, (din semnele de împărțire care preced un anumit x_j , la expresia care conține pe x_j se referă acele semne care stau între grupe, și de asemenea semnul din fața lui x_j). Este clar că numărătorul și numitorul oricărei fracții în care x_1 stă la numărător iar x_2 la numitor pot fi descompuși astfel ca să se obțină fracția de forma (*), de aceea demonstrația este încheiată.

A d o u a d e m o n s t r a ț i e (prin inducție). Se admite că expresia $x_1 : x_2 : \dots : x_n$ se scrie, după o aranjare a parantezelor, sub forma unei fracții A . Dacă în această expresie se înlocuiește x_n cu expresia $(x_n : x_{n+1})$ se obține ca rezultat fracția A , în care inter-

vine x_{n+1} care va fi așezat de cealaltă parte a liniei de fracție cu x_n adică dacă x se află la numitor, x_{n+1} se află la numărător și invers.

Se presupune în continuare că expresia considerată se termină astfel: $\dots (P : x_n)$ (P este o expresie sau numai x_{n-1}). Dacă se înlocuiește expresia $(P : x_n)$ cu expresia $((P : x_n) : x_{n+1})$ se obține, evident, aceeași fracție A , în care intervine în plus x_{n+1} , care va sta de aceeași parte a liniei de fracție ca și x_n (deoarece $(P : x_n) : x_{n+1} = P : (x_n \cdot x_{n+1})$).

Rezultă astfel că dacă se poate obține orice fracție (cu x_1 la numărător și cu x_2 la numitor), pentru un n oarecare, $n \geq 2$, se poate obține orice astfel de fracție pentru expresia $x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}$. Deoarece pentru $n = 2$ afirmația este adevărată, va fi adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Răspuns: 2^{n-2} fracții.

Observație. Este evident că se poate obține aceeași fracție pentru două moduri diferite de aranjare a parantezelor. Algoritmul dat în prima demonstrație (ca și construcția inductivă dată de cea de a doua demonstrație) indică unul din multele moduri de aranjare a parantezelor, pentru care se obține respectiva fracție.

319. Se arată ușor că un cub poate fi descompus în cinci tetraedre, cum se arată în fig. 135; dacă se separă tetraedrele $A'AB'D'$, $C'CB'D'$, $BB'AC$ și $DD'AC$, rămâne tetraedrul regulat $B'D'AC$.

Poate părea evident că un cub nu poate fi descompus în un număr mai mic de tetraedre, însă demonstrația riguroasă nu este deloc simplă. În continuare se expune cea mai scurtă demonstrație.

Fie cubul de muchie a descompus în câteva tetraedre. Cel puțin două din acestea au baza așezată pe fața $ABCD$ a cubului (fața cubului este un pătrat și nu poate fi față pentru nici un tetraedru). Absolut analog există cel puțin două tetraedre a căror bază este așezată pe fața $A'B'C'D'$ a cubului. Aceste tetraedre sînt evident diferite de primele două, deoarece tetraedrul nu poate avea două fețe paralele. Astfel se constată existența a cel puțin 4 tetraedre. Aceste 4 tetraedre nu pot umple cubul, deoarece suma volumelor primelor două nu depășește $\frac{a^3}{3}$ (suma ariilor bazelor nu depășește a^2 și înălțimea fiecăruia nu depășește a),

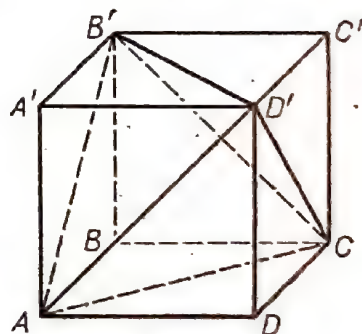


Fig. 135

suma volumelor ultimelor două tetraedre de asemenea nu depășește $\frac{a^3}{3}$, iar volumul cubului este a^3 . Astfel există cel puțin un al cincelea tetraedru.

Alte demonstrații, care nu folosesc ideea comparării volumelor, sînt mult mai lungi.

320. 1. Se demonstrează că oricare ar fi mulțimea de numere x_1, x_2, \dots, x_n , nu toate egale între ele, prin operațiile indicate în enunțul problemei cel mai mare număr din mulțime se micșorează, iar cel mai mic se mărește.

Într-adevăr, $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ nu depășește pe cel mai mare din numerele x_i și x_{i+1} , și este egal cu acesta numai cînd $x_i = x_{i+1}$ (analog pentru $\frac{x_n + x_1}{2}$). De aceea, dacă x este cel mai mare număr în mulțimea x_1, \dots, x_n , cel mai mare număr din mulțimea $\frac{x_1 + x_2}{2},$

$\frac{x_2 + x_3}{2}, \dots, \frac{x_n + x_1}{2}$ nu depășește pe x și este egal cu acesta numai dacă în mulțimea x_1, x_2, \dots, x se repetă odată sau de mai multe ori succesiunea xx . (numerele se consideră așezate circular, adică x_n este așezat lîngă x_1). Dacă în mulțimea x_1, x_2, \dots, x_n cea mai mare lungime a unui lanț format din numere alăturate x este $k < n$, în următoarea mulțime această lungime va fi, evident $k - 1$, apoi $k - 2$ etc. după k astfel de pași cel mai mare număr din mulțime fiind mai mic decît x . Demonstrația faptului că cel mai mic număr din mulțime se va mări este analoagă.

2. Se presupune că din o mulțime de numere întregi $a_1, a_2, \dots, \dots, a_n$ se obțin totdeauna mulțimi de numere întregi. Din cele deduse mai sus însă rezultă că după un număr de pași din această mulțime se obține o alta, compusă numai din numere egale.

Într-adevăr, diferența între cel mai mare și cel mai mic număr din mulțime, care rămîne pozitivă, trebuie, conform celor demonstrate să se micșoreze. Dacă rămîne tot timpul un număr întreg, după un număr de pași se anulează.

Mai trebuie demonstrat că dintr-o mulțime de numere diferite două cîte două a_1, a_2, \dots, a nu se poate obține prin nici un pas o mulțime de numere egale.

3. Dacă din o mulțime oarecare z_1, z_2, \dots, z_n se obține mulțimea $\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}, \dots, \frac{z_n + z_1}{2}$, de numere egale, adică

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z_2 + z_3}{2} = \frac{z_3 + z_4}{2} = \dots = \frac{z_{n-1} + z_n}{2} = \frac{z_n + z_1}{2},$$

atunci, evident, se găsește

$$z_1 = z_3, z_2 = z_4, \dots, z_{n-2} = z_2, z_{n-1} = z_1, z_n = z_2,$$

adică în mulțimea z_1, z_2, \dots, z_n numerele sînt egale „din două în două”. Dacă n este impar, aceasta este posibil numai dacă $z_1 = z_2 = \dots = z_n$. Astfel, pentru n impar nu se poate obține o mulțime de numere egale din o alta în care nu toate numerele sînt egale între ele.

4. În cazul că n este par, de forma $n = 2k$ trebuie cercetat din ce fel de mulțime y_1, y_2, \dots, y_n se poate obține o mulțime în care numerele să fie egale „din două în două” :

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = b, \frac{y_3 + y_4}{2} = b, \frac{y_5 + y_6}{2} = b, \dots, \frac{y_{2k-1} + y_{2k}}{2} = b,$$

$$\frac{y_2 + y_3}{2} = c, \frac{y_4 + y_5}{2} = c, \frac{y_6 + y_7}{2} = c, \dots, \frac{y_{2k} + y_1}{2} = c, (b \neq c).$$

Se observă că suma tuturor numerelor de pe primul rînd și de pe al doilea rînd este aceeași : $\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{2k}}{2}$, rezultînd că $b = c$.

Contradicția obținută arată că nu se poate obține după regula de mai sus mulțimea a, c, b, c, c, \dots ($b \neq c$).

S-a arătat, în acest mod, că din o mulțime de numere distincte două cîte două nu se poate obține o mulțime de numere egale. Rezolvarea este astfel încheiată.

321. Se notează cu S_1, S_2, S_3, S_4 și p_1, p_2, p_3, p_4 ariile și semiperimetrele triunghiurilor ABE, BCE, CDE, DAE respectiv (fig. 136). Deoarece aria fiecărui triunghi este egală cu produsul semiperimetrului prin raza cercului înscris, trebuie demonstrat că

$$\frac{p_1}{S_1} + \frac{p_3}{S_3} = \frac{p_2}{S_2} + \frac{p_4}{S_4}.$$

Deoarece $ABCD$ este patrulater circumscris, $AB + CD = BC + AD$.
Adăugînd la ambii termeni suma diagonalelor, se obține

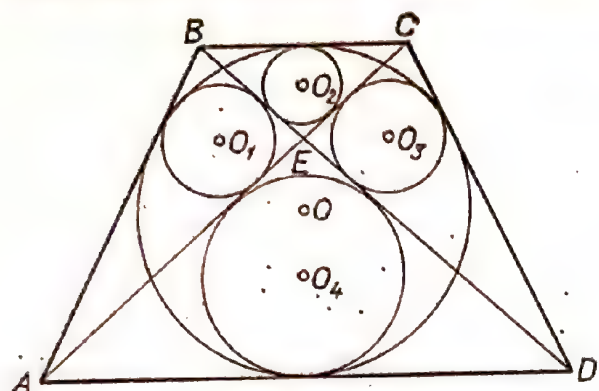


Fig. 136

$$2p_1 + 2p_3 = 2p_2 + 2p_4,$$

adică

$$p_1 + p_3 = p_2 + p_4.$$

Patrulaterul $ABCD$ este trapez ($AD \parallel BC$), de aceea triunghiurile ABD și ACD au aceeași arie, deci $S_1 = S_3$. Se va nota

$$S_1 = S_3 = S.$$

$\triangle BCE \sim \triangle DAE$, prin urmare $\frac{p_2}{p_4} = \frac{BE}{ED}$. Întrucît raportul ariilor a două triunghiuri care au aceeași bază este egal cu raportul înălțimilor lor, se arată ușor că

$$\frac{S_2}{S} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{BE}{ED} \text{ și } \frac{S_1}{S_4} = \frac{S}{S_4} = \frac{BE}{ED}.$$

de aceea $\frac{S_2}{S} = \frac{S}{S_4} = \frac{p_2}{p_4}$, rezultînd că $S = \frac{p_4}{p_2} \cdot S_2$, și $S = \frac{p_2}{p_4} S_4$. Din egalitatea $p_1 + p_3 = p_4 + p_2$ se obține

$$\frac{p_1}{S} + \frac{p_3}{S} = \frac{p_4}{S} + \frac{p_2}{S}.$$

Înlocuind în aceasta pe primul S cu S_1 , pe al doilea cu S_3 , pe al treilea cu $\frac{p_4}{p_2} S_2$ și pe al patrulea cu $\frac{p_2}{p_4} S_4$, se obține egalitatea cerută.

322. Se rezolvă punctul b). La prima cîntărire expertul așază pe talerul din stînga al balanței prima monedă, iar pe talerul din dreapta cea de-a opta. Talerul din dreapta se constată că este mai greu, balanța dezechilibrîndu-se. Este demonstrat astfel că prima monedă este falsă iar cea de-a opta este veritabilă.

La cea de-a doua cîntărire expertul adaugă pe talerul din stînga cele de-a noua și a zecea monedă, iar pe cel din dreapta cele de-a doua și a treia. De această dată este mai greu talerul stîng. Dat fiind că pe fiecare taler se găsește același număr de monezi, înseamnă că pe talerul stîng se găsesc mai multe monede veritabile decît pe cel din dreapta. Prin aceasta, tribunalul este convins că cele de-a noua și a zecea monede sînt veritabile, iar cele de-a doua și a treia false

La cea de-a treia cîntărire expertul aşază pe talerul stîng monedele a patra, a cincea, ..., a zecea, iar pe talerul din dreapta restul de monede. Talerul din dreapta se înclină, deci pe acesta se află mai multe monede veritabile decît pe cel din stînga. Tribunalul trage de aici concluzia că toate cele patru noi monede de pe talerul drept sînt veritabile, iar cele patru noi monede de pe talerul stîng sînt false. Tribunalul este, astfel, complet edificat.

323. Demonstraţia se face prin reducere la absurd. În acest caz numărul x compus din nouă cifre se poate scrie $x = a^2$, numărul a terminîndu-se de asemenea cu cifra 5, adică $a = 10b + 5$, deci $x = 100b(b + 1) + 25$, ceea ce arată că penultima cifră a lui x este 2. Se observă uşor că un număr de forma $b(b + 1)$ se termină neapărat cu una din cifrele 0, 2 sau 6. Cifra 2 a fost deja întîlnită pe penultimul loc, iar 0 nu intră în compunerea acestui număr, deci a treia cifră de la urmă, în scrierea lui x , este 6. Se deduce că $x = 1000c + 625$. În acest caz a se divide cu 25, deci $a = 100d + 25$ şi $x = 10\,000d^2 \pm 5\,000d + 625$. A patra cifră de la urmă în scrierea lui x trebuie să fie deci sau 0 sau 5, ceea ce este imposibil.

324. Demonstraţia se face prin inducţie, pasul inductiv fiind uşor de făcut de la n la $n + 2$. Fie construcţia săgeţilor realizată pentru punctele x_1, x_2, \dots, x_n . Se adaugă două noi puncte x_{n+1} şi x_{n+2} şi se completează săgeţile care sînt deja construite cu săgeţile care pleacă din toate punctele x_1, x_2, \dots, x_n către punctul x_{n+1} , cu cele care pleacă din punctul x_{n+2} către toate punctele x_1, x_2, \dots, x_n , şi cu săgeata care pleacă din x_{n+1} în x_{n+2} . Se constată uşor că toate punctele x_1, x_2, \dots, x_{n+2} sînt astfel unite prin săgeţi conform condiţiilor din enunţ (fig. 137). Etapa de verificare a inducţiei se parcurge pentru cazul $n = 3$ şi cazul $n = 6$, construcţia corespunzătoare a săgeţilor fiind reprezentată în fig. 138. Realizînd ca mai sus pasul inductiv, se pot construi astfel de săgeţi pentru orice $n \geq 6$ par şi

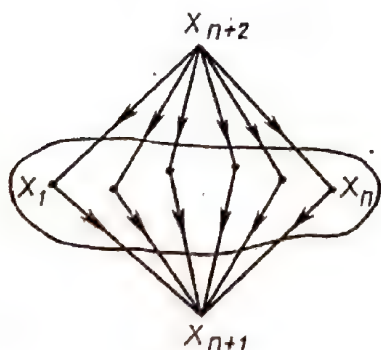


Fig. 137

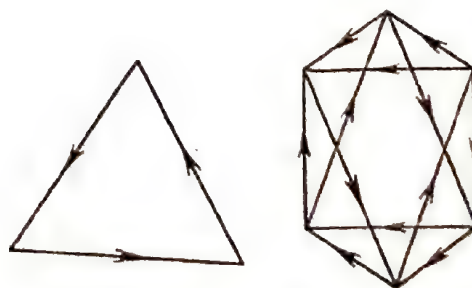


Fig. 138

$n \geq 3$ impar. Cititorului i se propune demonstrația faptului că o astfel de construcție nu este posibilă pentru $n = 4$.

325. Se dă $\angle BCA_1 = \angle B_1CA$. Adăugînd la membri acestei egalități unghiul ACB se obține că $\angle A_1CA = \angle BCB_1$. Din această egalitate și din $\frac{A_1C}{BC} = \frac{AC}{B_1C}$ (din cauză că $\triangle A_1CB \sim \triangle ACB_1$)

rezultă că $\triangle A_1CA \sim \triangle BCB_1$ și, în consecință, $\angle AA_1C = \angle B_1BC$. Considerînd triunghiurile BDE și ECA_1 (fig. 139) rezultă că $\angle BDA = \angle BCA_1$. Se vede astfel că punctul D este situat pe cercul α , circumscris triunghiului A_1BC . La fel se demonstrează, că punctul D se află pe cercul β circumscris triunghiului AB_1C . S-a demonstrat, în acest fel, că punctul de intersecție al lui AA_1 cu α coincide cu punctul de intersecție al lui BB_1 cu β . Raționamente analoage arată că punctul de intersecție al lui AA_1 cu α coincide cu punctul de intersecție al lui CC_1 cu cercul γ circumscris triunghiului AC_1B . Astfel, cercurile date la punctul a) al problemei și dreptele de la punctul b) trec toate prin un același punct.

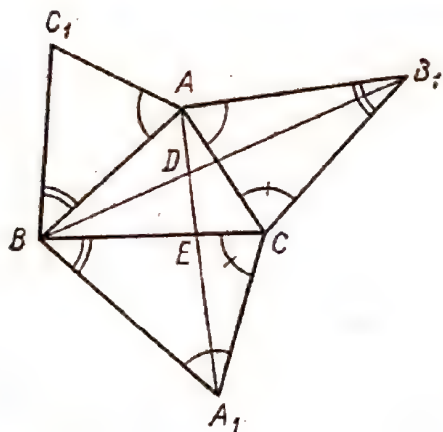


Fig. 139

326. Se renumerează cele N persoane. Dacă N este impar, ultimei persoane nu i se va face cunoștință cu nimeni. De aceea, fără a restrînge generalitatea, se poate considera că trebuie făcută cunoștința la N persoane între ele, pentru $N = 2n$. Se face cunoștința celei de a k -a persoane ($k \leq n$) cu cea de a N -a, $N - 1$ -a, ..., $(N - k + 1)$ -a. În acest caz cea de a k -a persoană va avea k cunoștințe. Același număr de cunoștințe îl va avea și cea de a $n + k$ -a persoană. Nu există în acest caz trei persoane care să aibă același număr de cunoștințe.

327. Se observă că în total regele face 64 de mutări și că lungimea unei astfel de mutări a regelui este 1 pe orizontală sau verticală, iar pe diagonală este $\sqrt{2}$. Din această cauză drumul cel mai scurt va fi cel în care regele parcurge cele 64 de pătrățele făcînd numai mutări pe orizontală sau pe verticală. Se arată ușor că un astfel de drum este realizabil efectiv, lungimea liniei poligonale parcurse de rege fiind în acest caz 64.

Se cercetează în continuare care este cel mai lung drum posibil ceea ce evident, înseamnă a găsi cel pe care regele face numărul maxim de mutări în diagonală. Se fixează un drum oarecare (fig. 140).

Se numerotează succesiv toate câmpurile marginale ale tablei și se împarte în sectoare linia poligonală închisă care descrie drumul regelui, în modul următor. Se numerotează cu 1 câmpul din colțul din stînga jos al tablei și se observă că cel puțin unul din cele două segmente ale liniei poligonale care pleacă din el îl unesc cu un câmp orizontal sau vertical. Se numerotează acest câmp cu 2 (fără a restringe generalitatea îl considerăm pe orizontală) și astfel drumul de-a lungul liniei poligonale este orientat, iar câmpurile marginale ale tablei se numerotează de la 1 la 28. Se va arăta prin inducție că primul câmp marginal care se întâlnește pe drum la mișcarea din câmpul k este câmpul $k+1$ (pentru $k=28$ câmpul următor este 1). Pentru $k=1$ aceasta este adevărat pe baza alegerii celui de al doilea câmp. Fie l primul câmp marginal întâlnit în drum după plecarea din câmpul k ($k > 1$). Dacă $l = k - 1$, drumul de la câmpul k la câmpul $k - 1$ împreună cu sectorul de drum de la câmpul $k - 1$ la k , considerat la pasul precedent și necuprinzînd alte câmpuri marginale, conform ipotezei de la inducție, formează un drum închis care nu trece prin câmpul $k + 1$, ceea ce nu se poate. Dacă $l \neq k - 1$ și $l = k + 1$, drumul între câmpurile k și l împarte tabla în două regiuni nevide și se constată ușor că dacă, continuîndu-și drumul, regele se întoarce din câmpul l în una din aceste regiuni, el nu mai poate ajunge în alta fără a intersecta un sector de drum deja parcurs. Este posibilă, astfel, numai egalitatea $l = k + 1$.

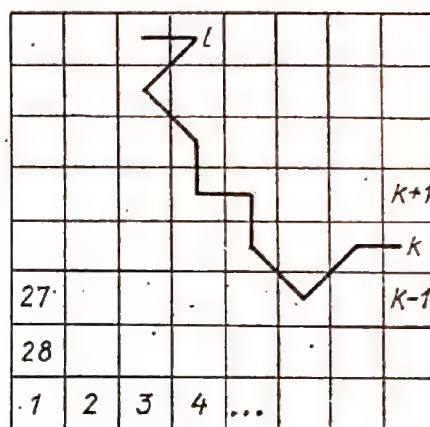


Fig. 140

Astfel, întregul drum închis se descompune în 28 de sectoare disjuncte, de la câmpul k la câmpul $k + 1$ ($k = 1, 2, \dots, 28$). Întrucît trecerea de la câmpul k la câmpul $k + 1$ este însoțită de schimbarea culorii, iar schimbarea culorii este posibilă numai prin mutări orizontale sau verticale, adică mutări de lungime 1, înseamnă că fiecare din cele 28 sectoare de drum trebuie să conțină cel puțin o mutare de lungime 1, deci mutări de lungime $\sqrt{2}$ nu pot fi mai mult de 36. Faptul că numărul de mutări diagonale este exact 36 se constată, construind un exemplu corespunzător (fig. 141). În acest fel, drumul cel mai lung are lungimea $28 + 36\sqrt{2}$.

328. Se observă că $\angle OAE = \angle ACE$ (fig. 142) deoarece aceste unghiuri au ca măsură jumătatea arcului AmE . Deoarece $AC \parallel OB$, rezultă că $\angle ACE = \angle EOK$. Se deduce că $\angle EOK = \angle OAE$ și triunghiurile AOK și OKE sînt asemenea, găsind din asemănarea

acestora că $\frac{OK}{AK} = \frac{EK}{OK}$, sau $OK^2 = EK \cdot AK$. În afară de aceasta, puterea punctului K față de cerc se scrie $KB^2 = EK \cdot AK$ și, prin urmare, $OK = KB$.

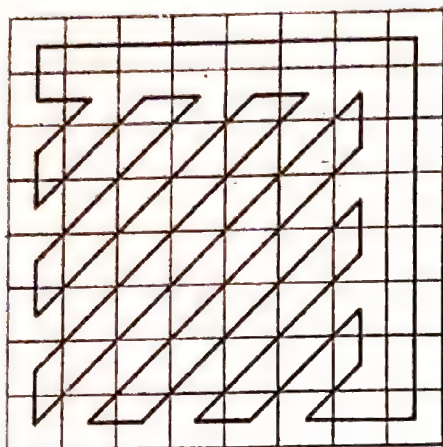


Fig. 141

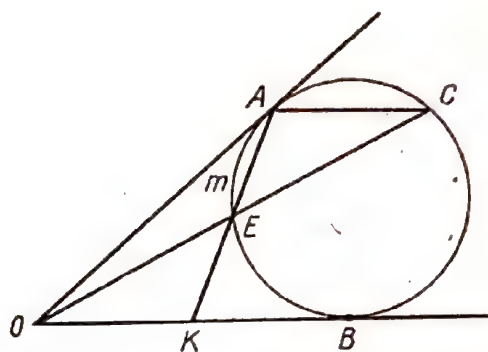


Fig. 142

329. Înlocuind în expresia dată valorile $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, se obține $|c| \leq 1$ și $-1 \leq a + b + c \leq 1$, $-1 \leq a - b + c \leq 1$. Rezultă de aici că funcția afină $bx + a + c$ ia valori mai mici sau segmentul $[-1, 1]$, adică $|bx + a + c| \leq 1$, când $x \in [-1, 1]$. În concluzie, $|cx^2 + bx + a| = |c(x^2 - 1) + bx + a + c| \leq |c||x^2 - 1| + |bx + a + c| \leq 1 + 1 = 2$, $x \in [-1, 1]$, ceea ce trebuia demonstrat.

330. Se va arăta că cel mai mare calificativ pe care îl poate avea câștigătorul este 20. Din enunț rezultă că după fiecare etapă calificativul celui mai puternic jucător rămas nu poate crește mai mult decât cu 2, ceea ce înseamnă că după cea de a zecea etapă calificativul celui mai tare nu poate depăși 21. Se va arăta că nu este posibilă mărirea calificativului celui mai tare nu se poate mări cu 2 după nici una din cele 10 etape. Se reduce la absurd. Înseamnă că după prima etapă au fost eliminați jucătorii cu numerele 1 și 2 (pierzând față de cei cu calificativele 3, respectiv 4), după cea de a doua etapă, jucătorii cu calificativele 3 și 4 (pierzând în fața celor cu calificativele 5 și 6) etc. În cea de-a zecea etapă au rămas jucătorii cu calificativele 19 și 20. Înseamnă că după ultima etapă calificativul celui mai puternic se mărește numai cu 1, ceea ce contrazice ipoteza. Învingătorul va fi numai un jucător cu calificativ care nu depășește 20.

Se dă în continuare un exemplu de joc, în care jucătorul cu calificativul 20 câștigă efectiv. Exemplul se construiește prin inducție considerându-se cazul general, când sînt 2^n jucători, iar învingătorul este jucătorul cu numărul $2n$. Pentru $n = 1$ construcția este evi-

dentă. Dacă este indicat modul de construcție al unui exemplu cu 2^{n-1} jucători, toți cei 2^n jucători sînt împărțiți în două grupe de 2^{n-1} jucători, învingătorii din fiecare grupă întîlnindu-se în cea de a n -a etapă, adică în finală.

În prima grupă intră jucătorii cu calificativele $2n$, $2n - 1$ și cei cu calificative mai mari. În a doua grupă intră jucătorii cu calificativele $1, 2, \dots, 2n - 2$ și toți ceilalți jucători.

Se construiește ușor un exemplu de joc în prima grupă, astfel încît cîștigătorul să aibă calificativul $2n$. În a doua grupă, conform ipotezei de la inducție, cîștigătorul este jucătorul cu numărul $2n - 2$. În finală se întîlnesc astfel jucătorii cu calificativele $2n$ și $2n - 2$, iar jucătorul cu calificativ $2n$ poate învinge.

331. Aria triunghiului nu poate depăși jumătate din produsul a două laturi ale sale. De aceea

$$1 \leq \frac{bc}{2} \leq \frac{b^2}{2},$$

deci $b \geq \sqrt{2}$.

332. Se consideră k drepte concurente în O , fiecare din acestea împărțind aria poligonului cu n laturi dat, în două părți de arii egale. Se construiește poligonul P ; simetricul poligonului P față de punctul O . Este evident că respectivele drepte împart în două părți egale și aria poligonului P' . Aria celor două porțiuni ale poligonului P aflate în unghiurile opuse la vîrf formate de două drepte vecine, sînt egale (fig. 143). Prin simetria poligonului P față de punctul O aceste porțiuni se transformă una în alta. Se deduce ușor că în fiecare din cele $2k$ unghiuri în care cele k drepte împart planul, trebuie să se afle cel puțin un punct de intersecție al conturelor poligoanelor P și P' , deoarece în caz contrar porțiunile poligoanelor P și P' situate în unghiul respectiv nu ar putea avea ariile egale. Din această cauză contururile poligoanelor P și P' se intersectează cel puțin în $2k$ puncte. Din convexitatea poligonului rezultă că pe fiecare din cele n laturi ale poligonului P se pot afla cel mult două puncte de intersecție cu P' . De aceea $2k \leq 2n$, adică $k \leq n$.

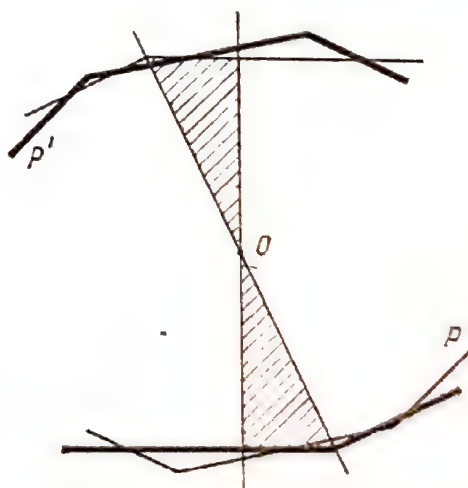


Fig. 143

333. Fiindcă ecuația $f(x) = x$ nu are rădăcini reale, înseamnă că trinomul de gradul al doilea $ax^2 + (b-1)x + c$ nu se anulează în nici un punct și are același semn pentru orice valoare a lui x . Se consideră, în consecință, două cazuri: 1) $ax^2 + (b-1)x + c > 0$, adică $f(x) > x$, 2) oricare ar fi x , $f(x) < x$.

Pentru primul caz se ia o valoare arbitrară $x = x_0$ și se scrie inegalitatea respectivă pentru cazul când $x = f(x_0)$ și $x = x_0$. Se obține astfel $f[f(x_0)] > f(x_0)$ și $f(x_0) > x_0$, deci $f[f(x_0)] > x_0$, ceea ce înseamnă că în primul caz ecuația $f[f(x)] = x$ nu are rădăcini reale. Analog se studiază al doilea caz.

334. Se demonstrează direct punctul b) deoarece punctul a) este o consecință a acestuia. Demonstrația se face prin inducție față de n . Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Se presupune că este adevărată pentru orice $n < n_0$ și se arată că este adevărată și pentru $n = n_0$. Se consideră dreptunghiul P format din un număr întreg de carouri, conținând toate cele n_0 carouri negre și astfel ca atît pe ultima coloană din stînga, cît și pe ultima linie de jos să se afle cel puțin un caro negru.

Dreptunghiul care se obține din P prin eliminarea ultimei coloane din stînga va fi notat cu P' (fig. 144). Este evident, că acesta va conține mai puțin decît n carouri negre, și după presupunerea de la

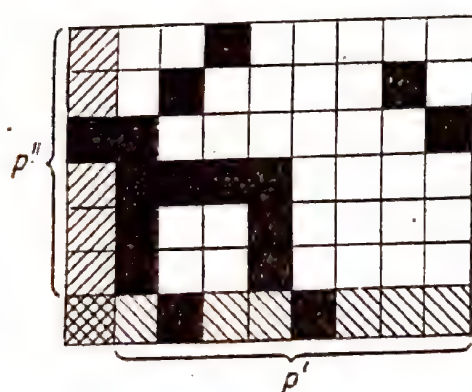


Fig. 144

inducție aceste carouri, considerate izolat de carourile coloanei care a fost eliminată, dispar nu mai tîrziu de momentul $t = n_0 - 1$. Este totuși ușor de observat că prezența carourilor negre în coloana ultimă din stînga a dreptunghiului P nu influențează cu nimic procesul de recolorare al carourilor care se găsesc în dreptunghiul P' , ci pot să atragă numai apariția de noi carouri negre în această coloană. Aplicînd deci regula dată totalității de n_0 carouri negre se găsește că la momentul $t = n_0 - 1$ dreptunghiul P' nu va mai conține nici un carou negru. Prin același procedeu se poate arăta că la momentul $t = n_0 - 1$ nu va mai fi conținut nici un carou negru în dreptunghiul P'' obținut din P prin eliminarea liniei ultime de jos. Deoarece este clar că în nici un moment nu se pot forma carouri negre în afara lui P , la momentul $t = n_0 - 1$ poate rămîne de culoare neagră numai caroul nesituat nici în P' , nici în P'' , adică acel carou din colțul din stînga jos al dreptunghiului P . Acesta va dispărea la momentul $t = n$, deci în acel moment dispar toate carourile negre.

335. Se observă că la o permutare circulară a indicilor, atât membrul stîng, cît și membrul drept rămîn invariante, deci dacă se face o nouă numerotare a numerelor x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 păstrînd ordinea de succesiune (se consideră că după x_5 urmează x_1). De aceea celui mai mare din cele cinci numere i se poate atribui orice indice. Este comod să se considere că x_2 este cel mai mare dintre aceste numere ($x_2 \geq x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$). Trecînd ambii membri ai inegalității în stînga, se obține

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4x_5 - \\ & - 2x_5x_1 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_5 = \\ & = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2 + 2x_4(x_1 + x_2 - x_3) + \\ & + 2x_5(x_2 + x_3 - x_1). \end{aligned}$$

Avînd în vedere că $x_2 \geq x_3$ și $x_2 \geq x_1$ și că toate numerele x_i sînt, conform enunțului, pozitive, se vede că expresia obținută este nenegativă, inegalitatea fiind astfel demonstrată (De fapt s-a demonstrat strict o inegalitate.)

336. Se aleg trei din punctele date: A, B și C . Conform enunțului, cel de al patrulea punct D se află în afara planului ABC . Fie $\triangle ABC$. Este evident că există trei cazuri care se exclud reciproc și anume cînd dintre laturile triunghiului ABC sînt muchii ale paralelipipedului 1) două laturi, 2) o latură, 3) nici una nu este muchie. Se calculează numărul diferitelor paralelipipe în fiecare din aceste cazuri.

În primul caz se poate alege o pereche de muchii din cele trei laturi în trei moduri. Fiecare alegere a muchiilor determină unic fața paralelipipedului din planul ABC . Punctul D trebuie în acest caz să se afle pe fața paralelă și poate ocupa pe această față poziția dată de oricare din cele patru vîrfuri, determinînd astfel patru paralelipipe distincte. În primul caz se găsesc deci $3 \cdot 4 = 12$ paralelipipe distincte.

În al doilea caz oricare din cele trei laturi poate fi aleasă ca muchie. Se observă ușor că pentru fiecare alegere, una din celelalte două laturi trebuie să fie diagonală a unei fețe a paralelipipedului. În sfîrșit, punctul D poate ocupa oricare din cele două poziții pe muchia paralelă cu cea aleasă în planul ABC . Astfel, în al doilea caz se obțin $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ paralelipipe.

În sfîrșit, în cel de-al treilea caz nu se mai găsește în planul ABC nici un vîrf al paralelipipedului, punctul D putîndu-se afla în oricare din celelalte cinci vîrfuri, determinînd din fiecare dată un paralelipiped și numai unul singur.

Astfel, se găsesc în total $12 + 12 + 5 = 29$ paralelipipe distincte.

COMPLETARE

A DOUĂZECEA OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

1. Fie m și n numere naturale și $n > m \geq 1$. Ultimele trei cifre ale numărului 1978^m sînt respectiv egale cu ultimele trei cifre ale numărului 1978^n , atunci cînd aceste numere sînt scrise în baza 10.

Să se afle m și n pentru care suma $m + n$ să fie minimă.

(Cuba)

2. Fie un punct dat P în interiorul unei sfere și A, B, C trei puncte arbitrare pe sferă, astfel încît PA, PB, PC să fie perpendiculare două cîte două. În paralelipipedul dreptunghic determinat de PA, PB, PC fie Q punctul diagonal opus lui P . Se cere locul geometric al punctului Q cînd P rămîne fix iar A, B, C variază pe sferă.

(S.U.A.)

3. Mulțimea numerelor întregi, strict pozitive, este reuniunea a două mulțimi disjuncte

$$\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}, \{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$$

satisfăcînd condițiile

$$f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots$$

$$g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$$

și $g(n) = f[f(n)] + 1$ pentru orice $n \geq 1$.

Să se determine $f(240)$.

(Anglia)

4. În triunghiul ABC , laturile AV și AC sînt egale. Un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC este de asemenea tangent, respectiv în P și Q , la laturile AB și AC . Să se arate că mijlocul segmentului PQ este centrul cercului înscris în triunghiul ABC .

(S.U.A.)

5. Fie $\{a_k\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ un șir de numere întregi, strict pozitive, distincte două câte două. Să se arate că, pentru orice număr întreg $n \geq 1$, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}.$$

(Franța)

6. Membrii unei societăți internaționale sînt din șase țări diferite. Lista membrilor conține 1978 nume, numerotate cu 1, 2, ..., 1978. Să se arate că există cel puțin un membru al acestei societăți, al cărui număr de ordine este egal cu suma numerelor de ordine a doi membri compatrioți ai săi sau egal cu dublul numărului de ordine al unuia din compatrioții săi.

(Olanda)

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR DATE LA A DOUĂZECEA OLIMPIADĂ INTERNAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

1. Numărul $1978^m(1978^{n-m} - 1)$ este multiplu de $1000 = 8 \cdot 125$. Primul factor este par iar cel de-al doilea factor este impar, prin urmare, numărul 1978^m este multiplu de 8 iar numărul $1978^{n-m} - 1$ este multiplu de 125. Din cauză că $1978 = 2 \cdot 989$ prima condiție atrage după sine că $m \geq 3$, iar cea de-a doua condiție implică $1978^{n-m} \equiv 1 \pmod{5}$, adică $(-2)^{n-m} \equiv 1 \pmod{5}$. Faptul că $(-2)^2 = 4 \equiv -1 \pmod{5}$ înseamnă că $n - m = 4k$, $k \geq 1$. Trebuie să fie determinată cea mai mică valoare a lui k pentru care 125 se divide la $1978^{4k} - 1$. Întrucît $1978^4 \equiv (-22)^2 = (-11 \cdot 2)^4 = (121 \cdot 4)^2 \equiv (-4 \cdot 4)^2 = 256 \equiv 6 \pmod{125}$, rezultă că $6^k \equiv 1 \pmod{125}$.

Se deduce că $6^k = (1 + 5)^k \equiv 1 + 5k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 5^2 \pmod{125}$,

iar condiția se exprimă astfel: 125 se divide la $\frac{1}{2} \cdot 5k[2 + 5(k-1)]$.

Numărul aflat în paranteza pătrată nu poate fi multiplu de 5, deci k este multiplu de 25 și $n - m = 100$, $m = 3$, $n = 103$.

2. Fie O centrul sferei date, iar X punctul opus lui P situat pe fața dreptunghiulară care conține punctele P , A și B . Conform

teoremei medianei $OP^2 + OQ^2 = OC^2 + OX^2$, iar $OP^2 + OX^2 = OA^2 + OB^2$, deci $2OP^2 + OQ^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$, ceea ce înseamnă că $OQ^2 = 3R^2 - 2OP^2 = \text{const}$, R fiind raza sferei. Locul geometric este o sferă cu centrul O și raza $\sqrt{3R^2 - 2OP^2} > M$.

Fie punctul Q astfel ca $OQ = \sqrt{3R^2 - 2OP^2}$. Sfera de diametru PQ intersectează sfera inițială S ($OQ > R > OP$); fie C unul din punctele comune acestora și X punctul opus lui C în dreptunghiul $PCQX$. Se obține $OP^2 + OQ^2 = OC^2 + OX^2$, adică $OX^2 = OP^2 + (3R^2 - 2OP^2) - R^2 = 2R^2 - OP^2 > R^2$, deci punctul X este situat în afara sferei S . Planul α trecând prin punctul P și perpendicular pe PC intersectează sfera S după cercul Γ , punctul P fiind interior acestui cerc, iar punctul X fiind situat în afara acestuia. Cercul de diametru PX situat în planul α intersectează pe Γ în B . Fie A punctul opus lui $B \in S$ în dreptunghiul $PBXA$. Se deduce că $OA^2 = OP^2 + OX^2 - OB^2 = OP^2 + 2R^2 - OP^2 - R^2 = R^2$, adică $A \in S$ ș.a.m.d.

3. Deoarece $g(n) = f[f(n)] + 1$ iar $f[f(n)]$ aparține primei mulțimi, înseamnă că există exact $n - 1$ elemente din mulțimea a doua mai mici decât $f[f(n)]$, ceea ce arată că $f[f(n)] = f(n) + n - 1$. Fiindcă 1 nu aparține celei de-a doua mulțimi, $f(1) = 1$. Primul element al celei de-a doua mulțimi este $f[f(1)] + 1 = 2$. Două numere întregi consecutive nu pot aparține la ce a de-a doua mulțime. Se deduce că $f(2) = 3$. Folosirea repetată a formulei stabilite conduce la $f(3) = 3 + 1 = 4$, $f(4) = 4 + 2 = 6$, $f(6) = 6 + 3 = 9$, $f(9) = 9 + 5 = 14$, $f(14) = 22$, $f(22) = 35$, $f(35) = 56$, $f(56) = 90$, $f(90) = 145$, $f(145) = 234$, $f(234) = 378$.

Întrucât $f[f(35)] + 1 = 91$ aparține la cea de-a doua mulțime, $f(57) = 92$. Conform formulei precedente, $f(92) = 148$, $f(148) = 239$, $f(239) = 386$. Din cauză că $f[f(148)] + 1 = 387$ aparține celei de-a doua mulțimi, înseamnă că $f(240) = 388$.

4. Dacă se notează cu O centrul primului cerc considerat și cu T punctul de tangență al acestui cerc cu cercul circumscris triunghiului ABC , se constată că figura este simetrică față de o axă care trece prin punctele A , O , T și mijlocul M al segmentului BC , axă perpendiculară pe segmentul BC .

Omotetia de centru A care transformă punctul T în M va transforma cercul de centru O în cercul înscris în triunghiul ABC , deci punctul O va fi transformat în centrul acestui cerc. Centrul O fiind situat pe axa de simetrie a figurii, înseamnă că $\angle ABT = \angle ACT = 90^\circ$, patrulateralele $ABTC$ și $APOQ$ sînt asemenea, deci omotetia considerată transformă punctul O în mijlocul segmentului PQ , ceea ce trebuia demonstrat.

5. Fie $\{a_k\}$ șirul pentru care se realizează minimul părții stîngi a inegalității, în ipoteza că n și a_1, \dots, a_n sînt fixate. Dacă $a_a > a_b$ pentru $1 \leq a < b \leq n$ oarecare, considerînd șirul $\{\alpha_k\}$ definit astfel:

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k, & k \neq a, k \neq b, \\ a_b, & k = a, \\ a_a, & k = b, \end{cases}$$

se obține

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{k^2} = \frac{a_a}{a^2} + \frac{a_b}{b^2} - \frac{a_a}{b^2} - \frac{a_b}{a^2} = (a_a - a_b) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) > 0,$$

în contradicție cu definiția șirului $\{a_k\}$. Aceasta arată că $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, deci $a_k \geq k$, $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

6. Celor șase țări le corespund șase submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, \dots, 1978\}$ care realizează o partiție a acestei mulțimi. Una din aceste submulțimi, fie A , va conține nu mai puțin de $\frac{1978}{6} = 329 + \frac{2}{3}$ elemente, adică 330 elemente: $a_1 < a_2 < \dots < a_{330}$. Cele 329 diferențe $a_{330} - a_k$ ($k = 1, 2, \dots, 329$) nu aparțin lui A (în caz contrar problema este rezolvată). Printre acestea se găsesc nu mai puțin de $\frac{329}{5} = 65 + \frac{4}{5}$ elemente, adică 66 elemente care aparțin uneia și aceleiași mulțimi, fie B . Dacă aceste diferențe sînt

$$a_{330} - a_{k_1} < a_{330} - a_{k_2} < \dots < a_{330} - a_{k_{66}} < \dots,$$

atunci $a_{k_j} - a_{k_{66}} = (a_{330} - a_{k_{66}}) - (a_{330} - a_{k_j})$ ($j = 1, 2, \dots, 65$) nu aparțin nici mulțimii A , nici mulțimii B . Printre acestea se găsesc 17 în una și aceeași mulțime, fie C , apoi 16 astfel de diferențe, ca mai sus, nu se găsesc nici în mulțimea A , nici în mulțimea B și nici în mulțimea C . Șase din acestea vor fi într-o mulțime D , cinci din diferențele ultimelor nu vor aparține la nici una din mulțimile A, B, C, D . Trei din acestea se află în una și aceeași mulțime E , cele două noi diferențe în mulțimea rămasă F , iar diferența lor nu se găsește în nici una din mulțimile A, B, C, D, E, F . Contradicția obținută arată că presupunerea făcută este falsă.

CUPRINS

Cuvînt înainte	3
1. Olimpiadele internaționale de matematică	5
2. Probleme	27
Problemele olimpiadelor internaționale de matematică	27
Probleme din materialele juriului olimpiadelor internaționale de matematică	51
Probleme date la olimpiade naționale	69
3. Rezolvări	88
Rezolvările problemelor olimpiadelor internaționale de matematică	88
Rezolvările problemelor din materialele juriului	209
Rezolvările problemelor date la olimpiade naționale	290
Completare. A douăzecea olimpiadă internațională de matematică	372

Redactor: Valentina Crețu
 Tehnoredactor: Elena Geru
 Coperta: arh. Valentin Vișan

*Bun de tipar: 16.10.78; Coli de tipar: 23,50
 Tiraj: 50.000 + 60 exemplare broșate; C.Z. 51(079.1)*



c. 1664

I. P. Informația

Str. Brezoianu nr. 23—25 București